Exercice N°1 (3 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -1+\frac{2}{\pi}x+\sqrt{1-\cos x}$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

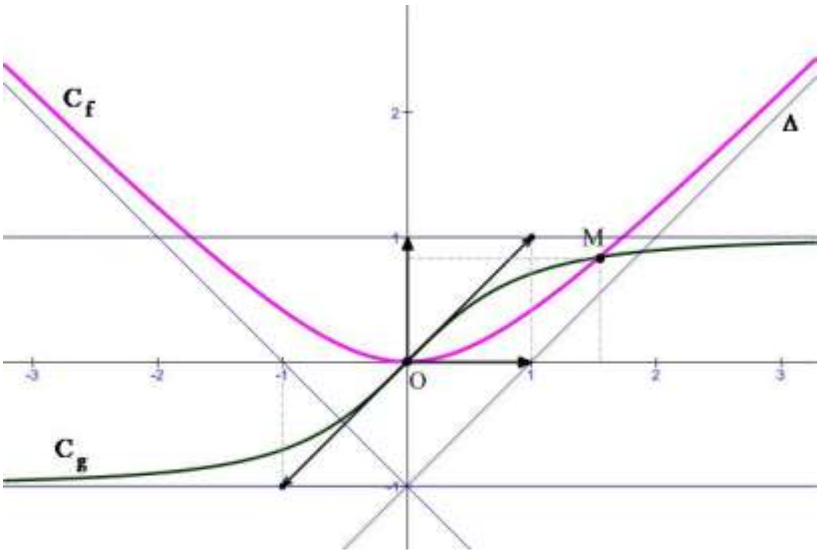
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{[f(x)]^{n+1}} = 0$.

3) l'équation f(x) =0 admet dans $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[$ une solution unique x_0.

4) Il existe au moins un réel c dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que f'(c) =0.

Exercice N°2 (6 points)

Dans le graphique ci-dessous $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, respectivement des fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$. Au voisinage de $+\infty$, $\mathscr{C}_f$ Possède une asymptote oblique Δ et $\mathscr{C}_g$ possède une asymptote horizontale.



1) Utiliser le graphique pour donner :

a) La parité de chaque fonction

b) $f(0), g(0), f'(0), g'(0), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} g(x), \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}, \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+x), \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$

c) La fonction principale et sa fonction dérivée parmi f et g

d) Construire la tangente T en M à la courbe $\mathscr{C}_f$ (Expliquer sur votre copie)

2) Pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ On pose : $\varphi(x)=\operatorname{tg}(2x)$

a) Soit $n\in\mathbb{N}$: Montrer que l'équation . : $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ admet dans $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ une solution une solution unique a_n. calculer a_0 puis a_2

b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante et quelle est convergente vers 0.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}^+} fo\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} fo\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}^+} go\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} go\varphi(x)$

b) Montrer que $go\varphi$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$.Dresser le tableau de variation de $go\varphi$.

Exercice N°3 (5 points)

Le plan complexe P étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) : $z^3+2ie^{i\theta}z^2-2ie^{2i\theta}z-4e^{3i\theta}(i+2)=0$,$\theta\in[0,2\pi[$.

a) Vérifier que 2 est une solution de (E_0) (l'équation pour $\theta=0$).

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_0) .

2)a) Montrer que z est une solution de (E_θ) si et seulement si $e^{-i\theta}z$ solution de (E_0)

b) En déduire les solutions de (E_θ).

3) On note A,B et C les images des solutions de (E_0) et par A',B' et C' les images des solutions de (E_θ).

a) Calculer puis interpréter les complexes $\dfrac{Z_{\overrightarrow{OA}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}}$ et $\dfrac{Z_{\overrightarrow{OB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}}$.

b) Caractériser l'application r : $P\longrightarrow P$ tq: $M(z)\mapsto M'(z')$; $z'=e^{i\theta}z$

c) En déduire que ABC et A'B'C' ont le même orthocentre.

d) Montrer que les points A', B' et C' varient sur des cercles concentriques apréciser .

Exercice N°4 (6 points)

On considère dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et E d'affixes respectives $1, -1$ et $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) a) Déterminer les racines cubiques de j et de $\bar{j}$

b) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{j\}$ et $\theta\in\mathbb{R}$ on a : $\dfrac{j+z}{j-z}=e^{i\theta}\Leftrightarrow z=i\,j\,tg\dfrac{\theta}{2}$

c) En déduire les solutions de l'équation (E'): $(j+z)^6+(j^2-z^2)^3+(j-z)^6=0$

2)Soit f l'application de P privé B dans P qui à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que $z'=\dfrac{-2z}{z+1}$

a) Ecrire j et l'affixe de E'= f(E) sous forme exponentielle

b) Vérifier que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ $z'+1=\dfrac{1-z}{1+z}$

c) Montrer que pour tout M distinct de B, on a : $BM'=\dfrac{AM}{BM}$

d)En déduire que lorsque M varie sur l'axe des ordonnées, M' varie sur un cercle à préciser

3)Soit Δ la droite d'équation $x=-1$

a) Montrer que si $M'\in\Delta$ alors $\dfrac{1-z}{1+z}$ est un imaginaire

b) En déduire que lorsque M' varie sur la droite Δ, M varie sur un cercle à préciser

4) a)Montrer que : $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}}\right)\equiv\pi+\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}\right)\ (2\pi)$

b) En déduire l'ensemble des points M lorsque M' décrit la demie droite [BE) privée du point B.