Prof : ***Bouchelliga Taieb***	***Devoir de contrôle N°1*** ***4éme année Maths*** ***Durée :2h***	***Lycée Bir Ali*** ***Année scolaire : 2011-2012***

Exercice1(3pts)

Soit (u_n) la suite définie par: $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ pour tout $n \geq 1$

1) Montrer que pour tout $n \geq 4$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{5}{8}$
2) En déduire la limite de u_n

Exercice2(5pts)

Soit (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n)$

1) a) Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique .
   b) En déduire que pour tout n, $u_n \leq v_n$
   c) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elle convergent vers la même limite α .
2) Montrer la suite $(v_n + u_n)$ est une suite constante .
3) Déterminer u_n et v_n en fonction de n.
4) Calculer α .

Exercice3(6pts)

1) a) Vérifier que $(1 + 5i)^2 = -24 + 10i$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (5 + 3i)z + 10 + 5i = 0$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 5(1 + i)z^2 + (4 + 15i)z + 10 - 20i = 0$.

   a) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pur que l'on déterminera .

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct on considère les points A, B et C d'affixes respectives $2i$, $2 - i$ et $3 + 4i$.

   a) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   b) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

Exercice4(6pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A,B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 2$.
Γ étant le cercle de centre A et de rayon 2 .
La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que $OH \prec OK$. On note z_H et z_K les affixes respectives de H et K.

1) Calculer la longueur OA . En déduire les longueurs OK et OH .
2) Déterminer la forme exponentielle de z_H et z_K .

3) Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui a tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{-4}{z}$

a) Déterminer et placer les points B' et C' images respectives de B et C par f.
b) Déterminer les points invariants par f .
c) Montrer que pour tout point M distinct de O, on a : $OM \times OM' = 4$.
d) Déterminer arg (z') en fonction de arg (z) .
e) Démontrer que $z_{K'} = (2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{H'} = (2\sqrt{2}+2)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
f) Expliquer comment construire les points K' et H' en utilisant uniquement la règle et le compas a partir des points des points K et H. Réaliser la construction dans la figure de l'annexe ci-jointe.