Lycée Hédi Cheker Sfax | Devoir de Contrôle N° 1 4 Math(2-3-4) | 12/11/2010

Exercice 1 (3 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1)Soit U et V deux suites réelles définies sur IN et telles que pour tout entier n on a : $V_n = (-1)^n U_n$. Si (U_n) est convergente alors (V_n) est convergente.

2) Si $\frac{\pi}{3}$ est un argument d'un nombre complexe z alors un argument de iz^3 est$(-\frac{\pi}{3})$

3) Soit f et g deux fonctions définies sur IR. Si f est paire et g est impaire alors fog est impaire.

Exercice 2 :(6points)

Soit f la fonction définie sur] - ∞ ; 1] par f(x)= $\sqrt{x^2-2x+2}+1$

1) Montrer que l'équation f(x)= 4x admet dans] - ∞ ; 1] une solution unique α. Vérifier que $0 \prec \alpha \prec 1$.

2) Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_0 = \frac{\alpha}{2}$ et pour tout entier naturel n ,

$U_{n+1} = \frac{1}{4} f(U_n)$.

a) Monter que pour tout entier n ; $0 \prec U_n \prec 1$.

b)Montrer que $\forall x \in [0,1]$ on a $\left|f'(x)\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Montrer que $\forall n \in IN$; $\left|U_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{8} \left|U_n - \alpha\right|$

d) Déduire que $\forall n \in IN \quad \left|U_n - \alpha\right| \leq (\frac{\sqrt{2}}{8})^n$ puis que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit g la fonction définie sur] 0 ; $\frac{\pi}{2}$] par g(x)=f(1+cotan x)

a) Montrer que $\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, g(x)=1+ $\frac{1}{\sin x}$.

b) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur [2 ;+ ∞[

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur] 2 ;+ ∞[et que pour tout x ∈] 2 ;+ ∞[on a $(g^{-1})'(x) = \frac{-1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$.

Exercice 3 (6 points)

Soit U la suite définie sur IN par $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \frac{U_n^2 - 3U_n + 6}{U_n - 1}$.

1)Montrer que $\forall n \in IN$; $3 \le U_n \le 4$

2) a)Montrer que la suite U est décroissante.

b) En déduire que U est convergente et déterminer sa limite.

3)a) Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $U_{n+1} - 3 \le \frac{1}{2}(U_n - 3)$.

b) Déduire que $\forall n \in IN$, $U_n - 3 \le (\frac{1}{2})^n$. Retrouver alors la limite de U.

4) a) Montrer que $\forall n \ge 4$; $2^n \ge n^2$.

b) Déduire que $\forall n \ge 4$; $n(U_n - 3) \le \frac{1}{n}$.

Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} [n(U_n - 3)]$

5) On pose pour tout $n \in IN$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{6}{U_k - 1}$ et $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{2U_k}{U_k - 1}$

a) Montrer que $\forall n \in IN$; on a : $U_{n+1} = S_n - S'_n + 4$.

b) Déterminer la limite de S_n puis celle de S'_n.

Exercice 4 (5 points)

On considère dans ℂ l'équation (E) : $z^2 - (1+2i)e^{i\theta}z - (1-i)e^{2i\theta} = 0$ avec $\theta \in [0;\pi]$.

1) a)Montrer que $z_1 = ie^{i\theta}$ est une solution de (E). Déterminer alors l'autre solution z_2 de (E).

b) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

c) Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, écrire z_2 sous forme exponentielle et sous forme cartésienne.

En déduire la valeur de $\cos(\frac{7\pi}{12})$.

2) Dans le plan complexe muni d'un ROND $(o ; \vec{u};\vec{v})$ on considère les points A ; B ; C et D d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 2 + e^{i\theta}$, $z_C = ie^{i\theta}$ et $z_D = (1+i)e^{i\theta}$

a)Déterminer et construire l'ensemble des points B lorsque θ décrit $[0, \pi]$.

b)Vérifier que pour tout $\theta \in [0;\pi]$ les points A, B et C ne sont pas alignés.

c)Montrer que ABDC est un parallélogramme.

d)Peut on déterminer θ pour que ABDC soit un losange.