

**Exercice N°1 ( 4 point)**

Soit P un nombre complexe de module 1

On considère l'équation : (Ep) :  $z^2 - 2pz - 1 = 0$

1- déterminer le nombre complexe p pour que (Ep.) admette une racine double.

2- Soient  $z_1$  et  $z_2$  les racines de (Ep.). On pose :

$$u_1 = \frac{(1+z_1)}{p} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{(1+z_2)}{p}$$

a) Calculer  $u_1 + u_2$  et  $u_1 \cdot u_2$

b) Montrer que Si  $u_1$  et  $u_2$  ne sont pas des réels alors  $|1+z_1| = |1+z_2|$ .  
Interpréter

c) Montrer que Si  $u_1$  et  $u_2$  sont des réels alors  $\arg(1+z_1) \equiv \arg(1+z_2)[2\pi]$ . Interpréter

**Exercice N°2 ( 4 point)**

On considère la suite  $U_n$  définie par :

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = U_n + 1 + \frac{2}{U_n} \quad \text{ou} \quad n \in \mathbb{N}.$$

1- Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n \geq 1$

2- Montrer que  $(U_n)_n$  est une suite croissante.

3- a) établir que : pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ; on a :  $1 \leq U_{n+1} - U_n \leq 3$

b) montrer par récurrence que : pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ,  
on a :  $n+1 \leq U_n \leq 3n+1$ .

4- Calculer la limite de  $(U_n)$

\*\*\*\*\*

4M

YBOULILA

Mr

5- On pose : pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$V_n = \frac{(-1)^0}{U_0} + \frac{(-1)^1}{U_1} + \frac{(-1)^2}{U_2} + \dots + \frac{(-1)^{2n}}{U_{2n}} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{U_k} \quad \text{et} \quad W_n = V_n - \frac{1}{U_{2n+1}}$$

- Montrer que  $(V_n)$  et  $(w_n)$  sont deux suites adjacentes.
- Donner un encadrement de  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ .

### Exercice N°3 ( 6 point)

Soit  $f$  l'application du plan  $P$  vers  $P$  définie par :

Pour tout  $M(z)$  on associe  $M'(Z)$  tel que :  $Z = e^{i\alpha}z + 1 - e^{i\alpha}$

avec  $\alpha \in ]-\pi; \pi]$ .

$(0, \overline{OA}, \overline{OB})$  un R.O.N.D du plan.

1- a) montrer que  $f$  est une rotation dont on précisera l'angle et le centre  $\Omega$ .

- Déterminer la valeur de  $\alpha$  pour laquelle :  $f$  transforme :  
 $A'(-1)$  en  $A''(1-2i)$

2- Dans la suite de l'exercice on suppose que :  $Z = iz + 1 - i$ .

- Montrer que :  $(E_1)z^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (E_2)Z^3 + 3(-1+i)Z^2 - 6iz + 2 + i = 0$
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E_1) : z^3 + 1 = 0$  et placer les points images  $M_1, M_2, M_3$  des solutions dans le plan complexe, puis résoudre l'équation  $(E)$
- En déduire que les points images des solutions de l'équation  $(E_2)$  sont  $f(M_1), f(M_2)$  et  $f(M_3)$  et que  $A, f(M_1), f(M_2), f(M_3)$  sont situés sur le même cercle.

### Exercice N°4 ( 6 point)

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels positifs de somme non nulle.

\*\*\*\*\*

4M

YBOULILA

Mr

On note  $(U_n)$  la suite réelle définie par :

$$U_0 = \alpha ; U_1 = \beta \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} ; U_{n+2} = \sqrt{U_{n+1}} + \sqrt{U_n}$$

- 1) Quelles sont les limites éventuelle de  $(U_n)$  ?
- 2) Montrer que si ,  $U_n \leq 1$  à partir d'un rang  $n_0$ , alors la suite  $(U_n)$  est croissante à partir de ce rang.
- 3) En déduire que : 0 ne peut pas être une limite de  $(U_n)$
- 4) Justifier qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $U_p \geq 1$  et montrer que  $n \geq p ; U_n \geq 1$
- 5) On veut montrer que  $(U_n)$  converge vers 4 .
  - a) Montrer qu'il suffit de montrer que la suite  $\sqrt{U_n}$  converge vers 2.
  - b) On pose alors : pour tout  $n \in \mathbb{N} ;$ 

$$z_n = \left| \sqrt{u_n} - 2 \right|$$

Montrer que :  $n \geq p ; z_{n+2} \leq \frac{1}{3}(z_{n+1} + z_n)$
  - c) On pose :  $a = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}$  et on considère la suite  $(x_n)$  définie par :  $n \in \mathbb{N} ;$ 

$$x_n = z_{n+1} - a z_n.$$

Montrer que :  $n \geq p ; 0 \leq x_{n+1} \leq \left( \frac{1}{3} - a \right) x_n$  puis que  $(x_n)$  tend vers 0
  - d) Justifier alors que  $(z_n)$  tend vers 0 elle aussi et conclure.

\*\*\*\*\*