LYCEE **ABOULOUBABA GABES**	**DEVOIR DE CONTROLE**	Prof **: S-SOLA**
Vendredi 22-10-2010	N° :1	SECTION : **4 M_3**
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DUREE : **2h**	COEFFICIENT : 4

NB : **+**Le sujet comporte 2 pages.
+ L'usage de correcteur est interdit.
+ La présentation est appréciée.

EXERCICE N°1 :(5 pts)

A) Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. L'élève indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct$(O,\vec{u},\vec{V})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et i.

L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\dfrac{z-i}{z-1}$ est un réel est :

a. la droite (AB) privée de A **b.** le segment $[AB]$ privé de A

c. le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A

2) Soit z un nombre complexe de module 3 Alors le conjugué de z est :

a. $\dfrac{3}{z}$ **b.** $\dfrac{\sqrt{3}}{z}$ **c.** $\dfrac{9}{z}$

3) Soit z un nombre complexe ; $|z+i|$ est égal à :

a. $|z|+1$ **b.** $\sqrt{z^2+1}$ **c.** $|iz-1|$

4) Soit z un nombre complexe non nul d'argument ϑ. Un argument de $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a. $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ **b.** $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ **c.** $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

5) Soit Ω le point d'affixe 1–i. L'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z-1+i| = |3-4i|$ a pour équation :

a. $y = -x+1$ **b.** $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$ **c.** $z = 1-i+5e^{i\vartheta}$ avec ϑ réel

B) Pour chaque question, répondre par **Vrai** ou **Faux.** Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée

1) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et si pour tout x≤1 on a $g(x) = 4x+\sqrt{2-x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ f(x) = +\infty$

2) Soit f une fonction paire définit sur IR telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, $l \in$ IR , alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x) = -l$

3) Soit f, g et h trois fonctions définies sur IR telles que pour tout réel x , g(x) ≤f(x) ≤ h(x).
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 4$ alors f admet une limite en +∞

4) Si f est une fonction définit sur IR et dont la courbe représentative admet dans un repère du plan pour asymptote au voisinage de +∞ la droite d'équation y = 3x + 5 alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

5) Soit (u_n) une suite réelle
Si (u_n^2) est convergente alors (u_n) est convergente.

Exercice N°3 : (4 points)

Soit la fonction f définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & si\ \ x<0 \\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Montrer que : pour tout $x\in\left]-\infty,0\right[$ on a : $\dfrac{x+2}{x}\leq f(x)\leq 1$

et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) Montrer que f est continue sur IR.

4)a/ Montrer que l'équation f(x) = 0 admet au mois une solution dans $\left]-\dfrac{1}{2},0\right[$

b/ En déduire que $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{-\alpha^2-\alpha}$

EXERCICE N°3 (6 pts)

1) a) Calculer $(1-2\sqrt{3}\,i)^2$

b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2-z+3+i\sqrt{3}=0$.

c) Mettre les solutions sous forme exponentielle.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A ,B et M d'affixes respectives $i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}e^{i\theta}$, $\theta\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$

a) Montrer que $z_M-z_A=2i\sin(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$ en déduire la distance AM en fonction de θ .

b) Déterminer θ pour le triangle OAM soit isocèle en A.

3) On désigne par B' le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses et N le point du plan tel que OB'NM soit un parallélogramme

a) Déterminer les affixes des points B' et N.

b) Déterminer l'ensemble des points N lorsque θ varie dans $\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

EXERCICE N°4(5 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A ,B , M ≠ B et M' d'affixes respectives $1+2e^{i\theta}$, 1 , z et z' telle que $z'=\dfrac{z-1-2e^{i\theta}}{z-1}$.

1) Soit f l'application de P \{B} dans P qui à tout point M associe le point M' .

a) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation (E) : $z^2-2z+1+2e^{i\theta}=0$.

b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E)

2) Dans cette question on suppose que $\theta=\pi$.

a) Montrer que $(\vec{u},\overrightarrow{BM})+(\vec{u},\overrightarrow{BM'})\equiv 0\ [2\pi]$

b) En déduire que la demie droite [BA) est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'})$.

c) Montrer que z' est un imaginaire si et seulement si |z| = 1.

d) En déduire la construction du point M'image d'un point M du cercle trigonométrique de centre O