Lycée secondaire ALI BOURGUIBA		2010 - 2011
Épreuve : Mathématiques	Devoir de contrôle n° 1	Durée 2 h
Prof : MAATALLAH	Le 13 - 11 - 2010	Classe : 4 M_2

EXERCICE N1 (5 points)

1/ Soit n un entier naturel non nul . Montrer que l'équation : $x^n + x^{n-1} \dots\dots\dots\dots\dots + x^2 + x - 1 = 0$ possè[illegible]e une unique solution dans $[\,0\ ,\ +\infty[$. On la note a_n .

2/ Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante . En déduire qu'elle converge .

3/ Montrer que , pour tout entier naturel $n \geq 2$: $a_n = \frac{1}{2} + \frac{{a_n}^{n+1}}{2}$.

4/ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} {a_n}^{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

EXERCICE N2 (5 points)

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + i(e^{i\theta} - 2)z + e^{i\theta} - 1 = 0$

2/ Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. Déterminer et construire l'ensemble des po[illegible]ts M d'affixe $z_M = i - ie^{i\theta}$ lorsque θ varie dans $]\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi[$.

3/ Soit les points A(1) et B(i) et $f: P\setminus\{B\} \to P\setminus\{A\}$, $M(z) \longmapsto M'(z')$ tel que $z' = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$

Montrer que si $z \neq i$ et $|z| = 1$ alors $z' \in i\mathbb{R}^*$. Montrer que $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

4/ a) Soit $\alpha \in]0\,,\pi[$. Montrer que si $z \neq i$ et $\frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} = e^{i\alpha}$ alors $z = -\cot g(\frac{\alpha}{2})$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(\bar{z} - i)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)(\bar{z} + i)^3$

EXERCICE N3 (4 points)

Dans le plan orienté , on considère un carré ABCD de centre I tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Soit E le point [illegible] que DCE soit un triangle équilatéral de sens direct . On désigne par J, K et L les points tels que $J = A * D$, $K = [illegible]C$ et $L = D * E$ et O le centre du cercle circonscrit au triangle DCE . I_1 est le symétrique de I par rapport à J .

1/ Soit $R = r_{(A\,,\ \frac{\pi}{2})}$, $t = t_{\overrightarrow{AB}}$, $R_1 = R \circ t$ et $R_2 = t \circ R$.

Caractériser R_1 et R_2 . On pose $M_1 = R_1(M)$ et $M_2 = R_2(M)$. Montrer que $\overrightarrow{DM_1} = \overrightarrow{BM_2}$.

2/ Caractériser $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)}$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $\psi = t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(AB)}$

3/ Pour tout M du plan on considère les points $M_1' = R_{(D\,,\ \frac{\pi}{3})}(M)$ et $M_2' = R_{(O\,,\ -\frac{2\pi}{3})}(M)$ .Montrer que l[illegible] milieu du segment $[M_1'M_2']$ est un point fixe qu'on précisera .

EXERCICE N4 (6 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)}$, si $x \in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

C_f est sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1/ a) Montrer que f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et que $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

b) Montrer que $\forall x \in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$

2/ Montrer que f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ sur $]-\infty, 1]$. Soit g sa réciproque .

3/a) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty, 1]$ et que $\forall x \leq 1$, $g'(x) = \frac{1}{2x^2-2x+1}$.

b) Ecrire une équation de la tangente T_0 à C_g au point A d'abscisse 0 puis tracer C_f , C_g , T_0 et $T_{\frac{\pi}{2}}$.

Bon travail