

**Exercice N°1 :** ( 4 pts )

A ] Dans chacune des questions suivantes, une seule réponse correcte indiquer là.

1) On considère la suite  $(V_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $V_n = n \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

a)  $\lim V_n = \frac{\pi}{2}$  ; b)  $\lim V_n = \frac{2}{\pi}$  ; c)  $\lim V_n = 1$

2) On considère la suite  $(W_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $W_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$

a)  $\lim W_n = 2$  ; b)  $\lim W_n = +\infty$  ; c)  $\lim W_n = \frac{1}{2}$

B] Soit  $f$  une fonction continue et dérivable sur son domaine de définition, son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗ $+\infty$			$+\infty$	↘ 3 ↗ 7	

1) Donner dans chaque cas le nombre de solutions de l'équation :

$f(x) = 0$  ,  $f(x) = 10$  ,

2) Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$  ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(1-x^2)$

**Exercice N°2 :** ( 6 pts )

On considère la suite  $U$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n^2} \end{cases} ; \quad n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que :  $\frac{1}{2} \leq U_n < 1$  ;  $n \in \mathbb{N}$

2) a ) Etudier la monotonie de la suite  $U$

b) En déduire que  $U$  est convergente et déterminer sa limite .

3) a) Montrer que :  $0 < 1 - U_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - U_n)$  ;  $n \in \mathbb{N}$

b) Déduire que :  $0 < 1 - U_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$  ;  $n \in \mathbb{N}$  puis retrouver la limite de la suite  $U$

4) On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$  ;  $V_n = \frac{S_n}{n}$  et  $W_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$  ;  $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que :  $n - \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \leq S_n < n$  ;  $n \in \mathbb{N}^*$

b) Déterminer alors ;  $\lim V_n$  et  $\lim W_n$

### Exercice N°3 : (4pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = ]-\infty, 1]$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-1 + \sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

1°) a - montrer que  $f$  est continue sur  $I$

b - Montrer que pour tout  $x$  de  $I$  on a :  $f(x) = \frac{-1}{1 + \sqrt{1-x}}$

2°) a - Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $I$

b - Déterminer  $f(I)$  et  $f([0,1])$ .

3°) Montrer que l'équation  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0,1[$

4°) Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $J = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$  par :

$$\begin{cases} g(x) = f(\operatorname{tg} x) & \text{si } x \neq -\frac{\pi}{2} \\ g(-\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de  $g$  sur  $J$ .

### Exercice N°4 : (6 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(o, \vec{u}, \vec{v})$ , on donne les points  $A(-i)$  et  $B(i)$ .

Soit  $f$  l'application de  $P \setminus \{A\}$  dans  $P \setminus \{B\}$  qui à tout point  $M(z)$  associe le point  $M'(z')$  tel que :  $z' = \frac{iz+1}{z+i}$

1°) On suppose  $M \neq A$  et  $M \neq B$

a) Montrer que  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) [2\pi]$

b) En **déduire** l'ensemble  $(E)$  des points  $M(z)$  tels que :  $z'$  est un réel non nul.

2°) Soit dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(F) : (iz+1)^3 = (z+i)^3$

a) Montrer que si  $z$  est une solution de  $(F)$  alors  $z$  est réel.

b) Soit  $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ . Donner la forme exponentielle du nombre complexe  $\left(\frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{i + \operatorname{tg} \alpha}\right)$ . En déduire

les valeurs de  $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  tels que  $\operatorname{tg} \alpha$  soit une solution de  $(F)$ .

3°) Soit  $\theta$  un réel de l'intervalle  $]0, 2\pi[$

a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - 2iz + 2ie^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0$

b) On désigne par  $M_1$  et  $M_2$  les points d'affixe respectives  $z_1 = e^{i\theta}$  et  $z_2 = 2i - e^{i\theta}$

i) Montrer que  $M_1$  et  $M_2$  sont symétriques par rapport à un point fixe que l'on précisera.

ii) trouver l'ensemble  $(\Gamma)$  décrit par  $M_1$  et  $M_2$  lorsque  $\theta$  varie.

iii) Montrer que  $(M_1M_2)^2 = 8(1 - \sin \theta)$ . Déduire la valeur de  $\theta$  pour laquelle la distance  $M_1M_2$  est maximale