Exercice N°1 : (5 pts)

On considère la fonction f définie sur $R*$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = \frac{\sin x - x}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

2) **a.** Montrer que la droite Δ : $y = -(x+1)$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $(-\infty)$

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ et interpréter graphiquement ce résultat.

c. Calculer $fof(\pi)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} fof(x)$.

3) Montrer que l'équation $2f(x) + 1 = 0$ admet au moins une solution α dans $\left]-\frac{\pi}{2};\pi\right[$

4) Soit la fonction g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$ par $\begin{cases} g(x) = \frac{f(\tan x)}{\tan x} \text{ si } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

a. Justifier que g est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$

b. Vérifier que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ on a : $g(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$

c. Déduire que g est continue a gauche en 0.

Exercice N°2 : (6 pts)

Soit a , b et c trois nombres complexes non nuls tel que $a + b \neq c$.

1) **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - (a+b+c)z + c(a+b) = 0$

b. On suppose dans cette question que $a = i$, $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c = a - b$

Ecrire les nombres complexes : $a - b$ et $a + b$ sous forme exponentielle

2) le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ qu'onsuppose non alignés

Soit $P(p)$ et $Q(q)$ les points tels que PBA et QAC sont des triangles rectangles isocèles et directs respectivement en P et Q et $D(d)$ le milieu de $[BC]$

a. Montrer que $2p = b + a + i(a-b)$ et $2q = c + a + i(c-a)$

b. Montrer que: $\frac{p-d}{q-d} = i$

c. En déduire la nature du triangle PDQ

3) Soit E le symétrique de B par rapport à P et F le symétrique de C par rapport à Q .

Et K le milieu du segment $[EF]$

a. Montrer que l'affixedu piont K est $k = a + \frac{1}{2}i(c-b)$

b. Montrer que les points K , P , Q et D appartiennent à un même cercle

Exercice N°3 : (4 pts)

On considère le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) **a.** Ecrire j et j^2 sous forme exponentielle

b. Calculer j^3 et $1+j+j^2$

2) Determiner les nombres complexes z tels que: $|z| = |z+1| = 1$

3) On considère les points A, B et C d'ffixesrespectifs: a ; b et c

a. Montrer que ABC est équilatéral $\Leftrightarrow \frac{b-a}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

b. Montrer que ABC est équilatéral $\Leftrightarrow a + jb + j^2c = 0$

Exercice N°4 : (5 pts)

La figure ci – contre est la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$.

* La droite $\Delta: y = 1 - x$ est la tangente à $\mathscr{C}$ en $A\ (0\ ;\ 1)$
* l'axe des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}$.
* la courbe $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

1) Par lecture graphique, répondre à ces questions :

a. Déterminer: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b. Dresser le tableau de variation de g .

c. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}_+$ on a : $1 - x \leq g(x) \leq 1$.

2) Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n+n}$.

a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n$ on a:

$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire que : $\frac{1}{2} \leq V_n \leq \frac{n}{n+1}$

b. Montrer alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{V_n}{n} = 0$

3) Soit la suite W définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{n}\left[g\left(\frac{1}{n+1}\right) + g\left(\frac{1}{n+2}\right) + \ldots\ldots\ldots + g\left(\frac{1}{n+n}\right)\right]$

a. Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n$ on a:

$1 - \frac{1}{n+k} \leq g\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq 1$. En déduire que : $1 - \frac{V_n}{n} \leq W_n \leq 1$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.