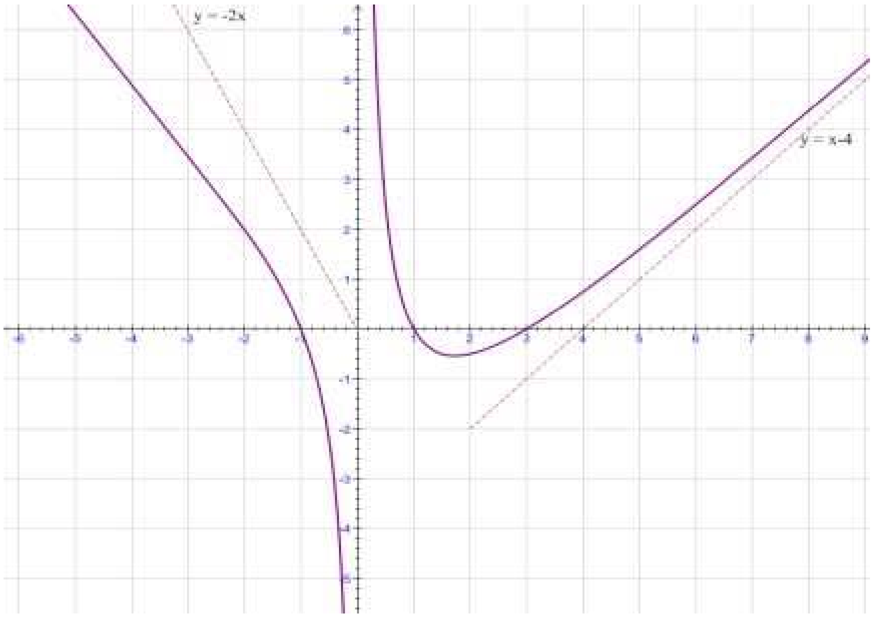
Lycée Secondaire M. Bourguiba	**DEVOIR DE CONTROLE N° 1**	**Prof : Haouati Chokri**	
Date: 13/11/2018	**MATHEMATIQUES**	**4M**	**Durée : 2h**

Exercice N°1(4points)



La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie est continue sur $\mathbb{R}^*$

$y = x - 4$, $x = 0$ sont des asymptotes à Cf

La droite $y = -2x$ est une direction asymptotique à Cf en $-\infty$

1) Déterminer par une lecture graphique les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(2x+f(x))}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(f(x)) - f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(2x+f(x))}{x}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction g_n sur l'intervalle $]0,1]$ par $g_n(x) = f(x) - n\,x$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique réel $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.

b) Montrer que $g_{n+1}(\alpha_n) < 0$ et en déduire que la suite (α_n) est décroissante.

c) Montrer alors que (α_n) est convergente puis calculer sa limite.

Exercice N°2(6points)

Soit $(O,\vec{u},\vec{v})$ un repere orthonormé direct du plan complexe P

Soit A le point d'affixe 1.On considere l'application f du plan P dans le plan P qui a tout point M(z) on associe le point M'(z') tel que $z'=2z-z^2$

1) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes z^2 et $2z$
   a) Trouver l'ensemble des points M tel que O,M_1et M_2 soient alignés
   b) On suppose que M n'appartient pas a l'axe des abscisses
      Montrer que OM_1M_2M' est un parallélogramme
   c) On suppose que $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi, \pi[$, construire les points M,M_1,M_2 et M'
2) Dans cette question M est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1
   a) Montrer que AM=MM'
   b) Montrer que le rapport $\dfrac{z'-1}{z}$ est réel
   c) En déduire que les points A et M' sont symetrique par rapport a la tangente en M au cercle $\mathscr{C}$
3) Soit $r \in IR_+^*$ .On designe par Γ le cercle de centre A et de rayon r et Γ' le cercle de centre A et de rayon r^2
   a) Montrer que $f(\Gamma)$ est inclus dans Γ'
   b) Résoudre dans C l'équation (E) : $2z-z^2=1+r^2e^{2it}$ avec $t \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$
   c) En déduire que $f(\Gamma)=\Gamma'$
   d) Trouver la forme trigonometrique des solution de (E) dans le cas ou r=1

Exercice N°3(5points)

Soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0=5$ et $u_{n+1}=\dfrac{4u_n^2-u_n+20}{u_n^2+4}$

1) Vérifier que $\forall n\in IN$ on a : $u_{n+1}-4=\dfrac{4-u_n}{u_n^2+4}$

2) Montrer que $\forall n\in IN$ on a : $u_{2n}\geq 4$ et $u_{2n+1}\leq 4$

3) a) Montrer que $\forall n\in IN$ on a : $|u_{n+1}-4|\leq \dfrac{1}{4}|u_n-4|$

b) En déduire que $\forall n\in IN$ on a : $|u_n-4|\leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

c) Montrer alors que (u_n) est convergente vers 4

4) Soit la suite (S_n) definie sur IN par $S_n=\sum_{k=0}^{n}(u_k-4)$

a) Montrer que $\forall n\in IN$ on a : $S_{2n+2}-S_{2n}=(u_{2n+1}-4)[1-\dfrac{1}{u_{2n+1}^2+4}]$

En déduire que la suite (S_{2n}) est décroissante

b) Montrer que la suite (S_{2n+1}) est croissante

c) Prouver que les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes

d) Montrer que (Sn) est convergente vers L et que $S_3<L<S_2$

Exercice N°4(5points)

On considere un triangle equilateral direct IBC .

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre I et de rayon IB et H le melieu de [BC]

La demi droite [HI) coupe $\mathscr{C}$ en A et soit A' = $S_{(CI)}(A)$

1) Montrer que A'C=AB
2) Caracteriser l'isometrie R= $S_{(AH)}\circ S_{(IB)}$
3) La droite (CI) recoupe $\mathscr{C}$ au point D
   On pose f=$S_{(AH)}\circ S_{(BD)}$ et I'=$S_{(BD)}(I)$
   a) Montrer que (AH)et (BD) sont paralléle
   b) Déterminer f(B) et f(I')
   c) Caracteriser f
   d) En déduire que I' $\in \mathscr{C}$
4) Soit A''= $t_{\overrightarrow{BC}}$ (A')
   a) Montrer que (A'B)//(AC)
   b) En déduire que A'' est un point de (AC)
5) Soit g= $t_{\overrightarrow{DC}}\circ S_{(BD)}$
   a) Caracteriser $g\circ S_{(AH)}$
   b) Identifier alors g