

Epreuve :

Mathématiques

Durée : 2 heures

Lycée de Sbeitla
Devoir de contrôle N°1
Classe : 4^{ème} Maths

Année scolaire : 2015 // 2016

Professeur :

Elabidi Zahi

Exercice 01 : (6points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x - \sqrt{x^2 + x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par ζ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j})

1) a) Montrer que pour tout $x < 0$, on a : $-1 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - 1$

b) En déduire que f est continue en 0

c) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1 - \cos x}{x}\right)$

d) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{x^3}{x^2 + 1}\right)$

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]-3; -2[$

4) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à ζ au voisinage de $+\infty$

Exercice 02 : (7points)

Soit (u_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 2}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2 \leq \frac{3}{4}(u_n - 2)$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 2 \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ Retrouver ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

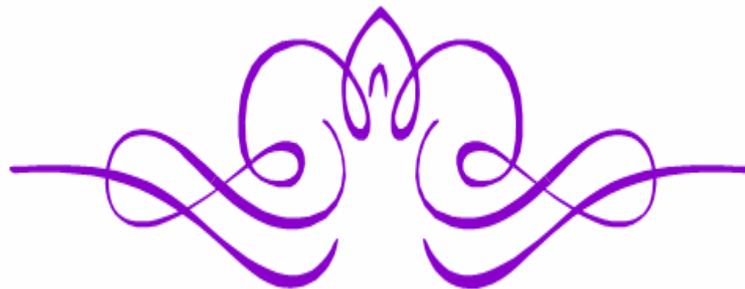
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n k u_k$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq S_n - n(n+1) \leq 6n \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2}$

Exercice 03 : (7points)

- 1) On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - i(2 - e^{i\theta})z + e^{i\theta} - 1 = 0$, où θ est un réel de $]0; 2\pi[$
 - a) Résoudre l'équation (E)
 - b) Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle
- 2) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overline{OA}, \overline{OB})$
On désigne par ζ le cercle de centre B et de rayon 1
Soit f l'application de $P \setminus \{B\}$ vers $P \setminus \{A\}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{\bar{z} - i}{\bar{z} + i}$
 - a) Montrer que f n'a aucun point invariant
 - b) Vérifier que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a : $z' - 1 = \frac{-2i}{\bar{z} + i}$
 - c) En déduire que $\forall M \in P \setminus \{B\}$, on a : $AM' \cdot BM = 2$ et $(\overline{BM}, \overline{AM'}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$
 - d) En déduire une construction de l'image d'un point M de ζ



Prof: @kidi Zohi