Prof :B.Anis L.S.ElKsour	Devoir de contrôle n°1 Durée :2h	Niveau :4ème sc-exp1 A.S :2017-2018

Exercice n°1(5pts)

Soit $\alpha \in]0, \pi[$.

I)1)Vérifier que $e^{2i\alpha} - 2isin\alpha\, e^{i\alpha} = 1$

2)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :$z^2 - 2ie^{i\alpha}z - 2ie^{i\alpha}sin\alpha = 0$

3)Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation :$z^4 - 2ie^{i\alpha}z^2 - 2ie^{i\alpha}sin\alpha = 0.$

(On donnera les solutions sous forme exponentielle)

II)Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$.On considère les points A ,B et C d'affixes respectives : $e^{i\alpha}, e^{i\alpha} - 1\ et\ e^{i\alpha} + 1$

1)Montrer que A est le milieu du segment [BC].

2)a)Vérifier que $1 + e^{i\alpha} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}\ \ et\ e^{i\alpha} - 1 = 2isin(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{\alpha}{2}}.$

b)En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{OB}\ et\ \overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux.

c)Déterminer α pour que le triangle OBC soit isocèle.

Exercice n°2(4pts)

Pour tout entier n$\geq 2\ et\ \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.On considère l'équation

(E) :$(z-1)^{n-1} = e^{in\theta}\,(\bar{z} - 1)$

1)Déterminer les racines n^{ième} de $e^{in\theta}$.

2)Vérifier que 1 est une solution de (E).

3)Soit z une solution de (E) différent de 1.Montrer que :$|z - 1| = 1$ et en déduire que $\bar{z} - 1 = \frac{1}{z-1}$.

4)a)Soit z un nombre complexe différent de 1 : z est solution de (E) si et seulement si $(z-1)^n = e^{in\theta}$.

b)En déduire les solutions de (E).

Exercice n°3(5pts)

Soit la suite U définie sur IN par :$U_0 = \frac{1}{2}$ $et U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+{U_n}^2}{2}}$ $\forall n \in IN.$

1)a)Montrer que :$0 < U_n < 1 \quad \forall n \in IN$

b)Montrer que (U_n) est croissante .En déduire qu'elle est convergente.

2)a)Montrer que pour tout n$\in IN$ $on\ a$: $0 < 1 - U_{n+1} < \frac{2}{3}(1 - U_n)\ \forall\ n \in IN.$

b)En déduire que :$|U_n - 1| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall n \in IN.$

c)Calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

3)On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k^2 \quad \forall\ n \in IN^*$

a)Montrer que : $U_{k+1}^2 - U_k^2 = 1 - U_{k+1}^2\ \forall k \in IN^*$

b)En déduire que : $S_n = n - 1 + 2U_1^2 - U_n^2\ \forall n \in IN^*$

c)Montrer que : $n - \frac{3}{4} < S_n < n + \frac{1}{4}\ \forall\ n \in IN^*$.En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice n°4(6pts)

Soit f la fonction définie sur IR par f(x)=$\begin{cases} x - \sqrt{1-x}\ si\ x \leq 1 \\ \frac{x+\cos(\pi x)}{x-1}\ si\ x > 1 \end{cases}$

1)a)Monter que $\lim_{x\to1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x-1} = 0.$

b)Vérifier que f(x)= $1 + \frac{1+\cos(\pi x)}{x-1}\ \forall x > 1$ .En déduire que f est continue en 1.

2)a)Montrer que $1 \leq f(x) \leq \frac{x+1}{x-1} \quad \forall x > 1$

b)Déterminer alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3)a)Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $I =]-\infty, 1]$.

b)En déduire que f$(I) = I$.

c)Montrer que l'équation f(x)+x^2=0 admet une seule solution $\alpha \epsilon [0; 1]$

et que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$