Introduction

On considère un dé cubique parfait (équilibré) dont les faces sont numérotés de 1 à 6.
On jette une fois ce dé et on observe le numéro de la face supérieure.
L'ensemble des résultats possibles (**éventualités**) est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. **« Ω est l'univers »**
Le nombre de résultats possibles est 6. « Le cardinal de Ω est 6 ; On note card Ω = 6 ».
Soit A = {1,3,5} : « Obtenir un numéro impair »
$A \subset \Omega$; **« A est un événement ».**
On note $\overline{A}$: « Obtenir un numéro pair » ; **« $\overline{A}$ est l'événement contraire de A ».**
$\overline{A}$ = {2,4,6} = Ω \ A.
Soit l'événement C : « Obtenir un numéro supérieur à 6 ».
C = ∅ **« C est un événement impossible ».**
D : « Obtenir un numéro n tel que $1 \leq n \leq 6$ » ; D = {1,2,3,4,5,6} = Ω.
« D = Ω est l'événement certain ».
{1} ; {2} ; {3} ; {4} ; {5} et {6} sont les **« événement élémentaires ».**
$A \cap \overline{A} = (A \text{ et } \overline{A})$: « Obtenir un numéro qui est à la fois pair et impair ».
$A \cap \overline{A} = \varnothing$; On dit que **« A et $\overline{A}$ sont des événements incompatibles ».**
Chacun des 6 numéros a une chance sur 6 d'être obtenu, donc **la probabilité d'obtenir chacun de ces numéros est $\frac{1}{6}$.**

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{card\Omega}$$

Tous les événements élémentaires sont équiprobables ; C'est le cas **d'une probabilité uniforme.**

$$\boxed{p(\{x\}) = \frac{1}{card\Omega} \text{ pour tout } x \in \Omega}$$

On a trois chances sur six d'obtenir un numéro impair

$$p(A) = \frac{3}{6} ; p(\overline{A}) = \frac{3}{6} \Leftrightarrow p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

Ainsi on a :

- $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorables à A}}{\text{Nombre de cas possibles}}$
- $p(A) + p(\overline{A}) = 1$
- $p(\Omega) = 1$
- p (∅) = 0

Définition :

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ un univers. On associe à chaque événement élémentaire $\{a_i\}$ un nombre $p_i \geq 0$, appelé **« probabilité de l'événement** $\{a_i\}$ », de telle sorte que :
$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.
Plus généralement, la probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans A.
On a $p(\Omega) = 1$ et p (∅) = 0.

Langage :

Vocabulaire ensembliste	Langage probabiliste
• Ensemble Ω	**Univers,** ou encore univers des « possibles » ou des « éventualités »
• $A \subset \Omega$	A est un **événement**
• $x \in A$	x est une **éventualité favorable** à A
• $A \subset \Omega \quad \overline{A} \subset \Omega$	A et $\overline{A}$ sont des **événements contraires**
• $A \cap C = \varnothing$	A et C sont des événements **incompatibles**
• Singleton $\{x\}$	$\{x\}$ est un événement **élémentaire**
• $D = A \cap C$	D est l'événement « A et C »
• $F = A \cup C$	F est l'événement « A ou C »
• $\varnothing$	$p(\varnothing) = 0$ événement **impossible**
• Ω	$p(\Omega) = 1$ événement **certain**

Propriétés des probabilités

Parties de Ω	événement	propriétés
$\varnothing$, Ω	Evénement **impossible, certain**	$p(\varnothing) = 0$, $p(\Omega) = 1$
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont **incompatibles**	$P(A \cup B) = p(A) + p(B)$
$\overline{A}$	$\overline{A}$ est l'événement **contraire** de A	$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
A, B	A et B quelconques	$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

On notera que, pour tout événement A, $0 \leq p(A) \leq 1$.

Exercice

On jette un dé sur une table et on lit le numéro de la face supérieure. Sachant que les faces 1, 3 et 4 ont la même probabilité d'apparaître égale à 0.2, la probabilité de la face 2 est de 0.15 et la probabilité d'apparition de la face 6 est de 0.1. Calculer :

1. La probabilité d'apparition de la face 5.
2. La probabilité d'avoir un numéro pair.
3. La probabilité d'obtenir un numéro $\geq$ 3.
4. La probabilité d'obtenir un numéro appartenant à l'intervalle $[2,5[$.

Situations d'équiprobabilités :

Définition

Il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Théorème

Lorsqu'il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est : $p(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega} = \dfrac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$

Exercice1

Un sac contient trois boules rouges et quatre boules blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément et au hasard deux boules de ce sac.

1. Quel est l'univers Ω des cas possibles ? Donner cardΩ.
2. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « obtenir deux boules de même couleur ».
   B : « obtenir deux boules de couleurs différentes ».
   C : « obtenir au moins une boule rouge ».
   D : « obtenir au plus une boule blanche ».

Exercice2

Un sac contient 9 jetons numérotés de 1 à 9. On tire successivement et avec remise 3 jetons du sac. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « tirer 3 jetons ayant des numéros pairs »

B : « tirer 3 jetons dont la somme des numéros est paire »

Exercice3

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules blanches indiscernables au toucher. On extrait successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Déterminer la probabilité de

A : « obtenir 3 boules de même couleur »

B : « obtenir 2 boules rouges et 1 boule blanche »