

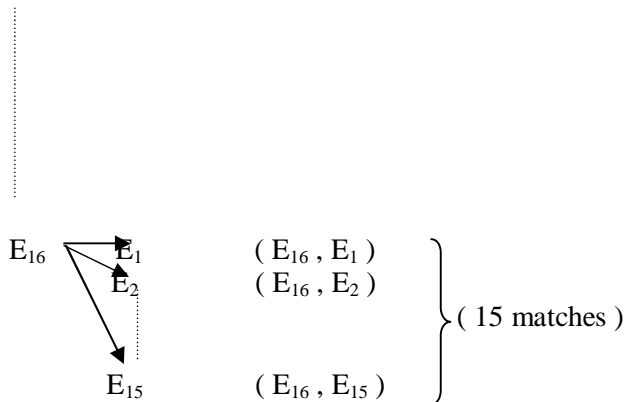
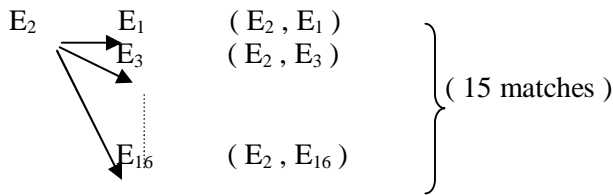
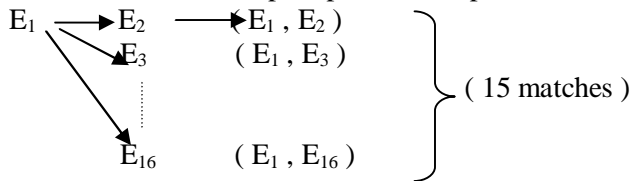
I. Arrangements :

Activité préparatoire :

Seize équipes de football participent à un championnat . Chaque équipe rencontre toutes les autres en deux matches : un « Aller » un « RETOUR » .

Combien de matches au total ?

➤ 1^{ère} méthode : On peut présenter le problème en utilisant le schéma suivant , appelé arbre de choix :



Le nombre de matches au total est : $16 \times 15 = 240$.

➤ 2^{ème} méthode : Chaque « journée de championnat » il y a 8 matches ; puisque chaque équipe joue 30 matches : 15 « Aller » et 15 « Retour » , il y a 30 « journées de championnat » ; donc $8 \times 30 = 240$.

Commentaire :

Appelons A l'ensemble des seize équipes $A = \{ E_1, E_2, \dots, E_{16} \}$.

Un match est un couple d'éléments de A deux à deux distincts (E_i , E_j) avec $i \neq j$.

Un couple d'éléments deux à deux distincts de A est **un arrangement de 2 éléments de A** .

Définition :

Soit A un ensemble de n éléments $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Soit $p \in \mathbb{N}$; $1 \leq p \leq n$.

On appelle arrangement de p éléments de A tout p – uplet d'éléments deux à deux distincts de A .

Un p – uplet d'éléments de A deux à deux distincts est $(x_1 , x_2 , x_3 , \dots , x_p)$ avec $x_i \neq x_j$

$1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq p$.

Remarque : Un arrangement de p éléments parmi n est un ordre sur p éléments choisis parmi n éléments .

Exercice 1 :

Déterminer le nombre de mots de quatre lettres différentes que l'on peut former avec les lettres du mot CONFLIT .

Le nombre de mots de quatre lettres différentes parmi les sept lettres du mot CONFLIT est égale au nombre d'arrangements de 4 lettres choisies parmi 7 .

C'est donc $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 1840$.

Notation :

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble de n éléments est noté A_n^p

Théorème :

$n \in \mathbb{N}^*$; $p \in \mathbb{N}$; $1 \leq p \leq n$.

$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$; c'est un produit de p facteurs naturels décroissants à partir de n .

Exemples :

$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$; $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$.

Exercice 2 :

On revient à l'énoncé de l'exercice 2 , combien de mots de quatre lettres différentes contiennent seulement des consonnes ?

Le mot CONFLIT contient consonnes sont :

.....
.....
.....

Conclusion :

Choisir p éléments dans un ensemble de n éléments **ET** leur imposer un **ordre** , c'est fabriquer un **arrangement** de p éléments pris parmi n .

➤ **L'ordre intervient et il n'y a pas de répétition d'éléments .**

Exercices d'applications :

- 1- On donne n points distincts . Calculer le nombre de bipoints non nuls que l'on peut former avec ces n points .
- 2- Quinze chevaux participent de bout en bout à une course . Dénombrer le nombre de tiercés dans l'ordre (on suppose qu'il n'y a pas d'ex-aequo) .
- 3- Une société comprend 50 personnes . Combien peut – on former de bureaux comprenant un président , un secrétaire , un trésorier ?
- 4- Combien y a-t-il de nombres de trois chiffres écrits avec trois chiffres différents choisis parmi les cinq chiffres : 2 , 3 , 7 , 5 , 8 .
- 5- On place dans une boîte , 26 papiers portant chacun le nom d'un élève de la classe . (On suppose qu'il n'y a pas des élèves ayant même nom)
On tire deux papiers **successivement et sans remise** dans la boîte .
 - a- Déterminer le nombre des tirages possibles .
 - b- Dénombrer les tirages pour lesquels le nom du 1^{er} papier est , dans l'ordre alphabétique , avant le nom du 2^{ème} papier .

II. Permutations :

Exercice 1 :

1. Combien de classements peut – on former avec les 26 élèves de la classe ? (On suppose qu'il n'y a pas d'ex – aequo) .
2. Combien peut – on former de mots avec toutes les lettres du mot ROI , chaque lettre sera utilisée une seule fois ? (les mots peuvent avoir un sens ou non) .

Réponses :

1. Un classement est un arrangement de 26 éléments pris parmi les 26 élèves , donc le nombre de classements qu'on peut former est $A_{26}^{26} = 26 \times 25 \times 24 \times \dots \times 2 \times 1$
Ce nombre est appelé nombre de **permutations** de 26 éléments .
2.
.....

Définition :

A étant un ensemble de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) , on appelle **permutation** de n éléments de A , tout arrangement de n éléments de A .

Le nombre de permutations de n éléments est alors $A_n^n = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$, ce nombre est noté $n!$ et se lit **factorielle n**

Exemples :

$1! = 1$; $2! = 2 \times 1 = 2$; $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$; $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$; $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Par convention : On pose $0! = 1$.

Exercice 2 :

- Calculer : $7!$; $4! \times 6!$; $\frac{5!}{2!}$; $\frac{8! \times 21!}{8 \times 20!}$
- Montrer que pour $n \geq 2$ on a : $n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)!$
- Simplifier les expressions : $\frac{n!}{(n-1)!}$; $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$; $\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!}$
- Montrer que $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ avec $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et $1 \leq p \leq n$

III. Combinaisons :

Exercice 1 :

Combien l'ensemble $A = \{ a, b, c, d \}$ a-t-il de parties à 2 éléments ? à 3 éléments ? à 1 élément ?

Solution :

- Les parties à 2 éléments que l'on peut former à partir de l'ensemble $\{ a, b, c, d \}$ sont : $\{ a, b \}$; $\{ a, c \}$; $\{ a, d \}$; $\{ b, c \}$; $\{ b, d \}$; $\{ c, d \}$
Leur nombre est 6 .
Chacune des paires précédentes est dite une **combinaison de deux éléments de A** .
Leur nombre se note : C_4^2 on a alors : $C_4^2 = 6$
- Les parties à 3 éléments que l'on peut former à partir de l'ensemble A sont : $\{ a, b, c \}$; $\{ a, b, d \}$; $\{ a, c, d \}$; $\{ b, c, d \}$
Chacun des sous ensembles précédents est une **combinaison de trois éléments de A** .
Leur nombre est égal à : $C_4^3 = 4$.
- Il en est de même pour les parties à 1 élément de A . C'est à dire $C_4^1 = 4$.
- Vérifier que : $C_4^2 = \frac{A_4^2}{2!}$; $C_4^3 = \frac{A_4^3}{3!}$; $C_4^1 = \frac{A_4^1}{1!}$

Définition :

Une partie à p éléments d'un ensemble de n éléments ($p \leq n$) est appelée **combinaison** de p éléments pris parmi n .

Remarque :

L'ordre n'intervient pas et il n'y a pas de répétition d'éléments .

Théorème : Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments ($p \leq n$) est notée C_n^p et il est

égal à $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$

Exercice 2 :

Quinze chevaux participent de bout en bout à une course . Dénombrer le nombre de tiercés dans le désordre . (On suppose qu'il n'y a pas d'ex - aequo.) Comparer au résultat de l'exercice 2 page 2 .

Exercice 3 :

- Une assemblée de 16 personnes veut désigner une délégation de 3 personnes parmi ses membres. Dénombrer les délégations possibles .
- On veut élire un comité de 4 personnes choisies parmi 12.
 - De combien de manières peut - on former ce comité ?
 - De combien de manières si Monsieur X refuse de siéger avec Monsieur Y ?

Exercice 4 :

Une boîte contient 5 boules rouges et 3 boules blanches indiscernables au toucher , on tire **simultanément** 3 boules de cette boîte.

1. Quel est le nombre de tous les tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ?
3. Quel est le nombre de tirages d'une boule blanche et 2 boules rouges ?
4. Quel est le nombre de tirages comportant au moins une boule blanche ?
5. Quel est le nombre de tirages comportant au plus une boule blanche ?

Propriétés :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$; $p \leq n$ on a : $C_n^p = C_n^{n-p}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leq n - 1$ on a : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

Exercice 5 :

1. Résoudre dans \mathbb{N}^* , $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$.
2. Calculer le plus simplement possible $C_5^5 \times C_5^0 + C_5^1 \times C_5^4 + C_5^2 \times C_5^3$.
3. Calculer la valeur du quotient $\frac{C_n^1 \times C_{2n}^2}{C_{3n}^3}$; Trouver la limite de ce quotient si n tend vers l'infini.

IV. Formule du binôme de Newton :

Exercice 1 : Soient a et b deux réels.

Développer $(a + b)^2$; $(a + b)^3$; $(a + b)^4$.

1. Vérifier que

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= C_2^0 \times a^2 \times b^0 + C_2^1 \times a^1 \times b^1 + C_2^2 \times a^0 \times b^2 \\ (a + b)^3 &= C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3 \\ (a + b)^4 &= C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 \end{aligned}$$

Formule du binôme :

$$n \in \mathbb{N}^* ; (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^p a^{n-p} b^p + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n \\ &= \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p a^{n-p} b^p \end{aligned}$$

Démonstration : (par récurrence).

Conséquence : $(a - b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p (-1)^p a^{n-p} b^p$

Exemples : Développer $(a + b)^5$ et $(a + b)^6$ puis $(a - b)^5$ et $(a - b)^6$

Remarque : Pour obtenir facilement des C_n^p , pour n petit, **le triangle de Pascal.**

| | | |
|-------|---|------------------|
| n = 0 | C_0^0 | 1 |
| n = 1 | $C_1^0 \ C_1^1$ | 1 1 |
| n = 2 | $C_2^0 \ C_2^1 \ C_2^2$ | 1 2 1 |
| n = 3 | $C_3^0 \ C_3^1 \ C_3^2 \ C_3^3$ | 1 3 3 1 |
| n = 4 | $C_4^0 \ C_4^1 \ C_4^2 \ C_4^3 \ C_4^4$ | 1 4 6 4 1 |
| n = 5 | | 1 5 10 10 5 1 |
| n = 6 | | 1 6 15 20 15 6 1 |

Ce triangle est un résultat de la **formule de Pascal** : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$.

Exercice 2 :

- Développer $(x+1)^6$; $(x-1)^6$; $(2x+3)^5$ et $(2x-3)^5$
- Démontrer que : $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5$
- Calculer les sommes :
 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n$
 $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \dots + (-1)^p C_n^p + \dots + C_n^n$
 $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^p C_n^p + \dots + 2^n C_n^n$

V. Nombre de parties d'un ensemble fini :

Soit A un ensemble fini de n éléments ; $n \in \mathbb{N}^*$
 Une partie de p éléments de A est une de p éléments choisis parmi les n éléments de A.
 Le nombre de parties de p éléments de A est
 Le nombre de toutes les parties de A est :

Théorème :

A étant un ensemble contenant n éléments ; $n \in \mathbb{N}$
 Le nombre de parties de A est 2^n
 L'ensemble des parties de A est noté P(A).

Exemple :

Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Le nombre de parties de A est

VI. Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini :

Exercice 1 :

Soit $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{a, b\}$
 Trouver toutes les applications de A vers B.

Solution :

Pour chacun des 3 éléments de A , il y a 2 choix possibles.
 Le nombre de toutes les applications de A vers B est $2^3 = 8$.

Théorème :

A et B étant deux ensembles finis de nombres d'éléments respectifs p et $n \in \mathbb{N}^*$
 Le nombre d'applications de A vers B est n^p .

Exercice 2 :

- Combien de numéros de téléphone à 6 chiffres peut – on former avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- D'un jeu de 52 cartes, on tire successivement 3 cartes. De combien de façons peut – on faire ce tirage :
 - Si l'on remet la carte dans le jeu après avoir lu ce qui était écrit.
 - Si l'on ne remet pas la carte dans le jeu ?

Résumé : On distingue trois types de tirages :

| Types de tirages | Successif avec Remise | Successif sans remise | Simultané |
|---|---|---|--------------------------|
| Un résultat | Un p – uplet avec possibilité de répétition | Un p – uplet d'éléments distincts 2 à 2 | Une partie de p éléments |
| Ordre | L'ordre intervient | L'ordre intervient | L'ordre n'intervient pas |
| Nombre de tirages de p éléments parmi n | n^p | A_n^p | C_n^p |