I. Arrangements :

Activité préparatoire :

Seize équipes de football participent à un championnat . Chaque équipe rencontre toutes les autres en deux matches : un « Aller » un « RETOUR » .

Combien de matches au total ?

- $1^{ère}$ méthode : On peut présenter le problème en utilisant le schéma suivant , appelé arbre de choix :

E_1 → E_2 → (E_1 , E_2)
E_3 (E_1 , E_3)
⋮
E_{16} (E_1 , E_{16})
(15 matches)

E_2 → E_1 (E_2 , E_1)
E_3 (E_2 , E_3)
⋮
E_{16} (E_2 , E_{16})
(15 matches)

⋮

E_{16} → E_1 (E_{16} , E_1)
E_2 (E_{16} , E_2)
⋮
E_{15} (E_{16} , E_{15})
(15 matches)

Le nombre de matches au total est : 16 x 15 = 240 .

- $2^{ème}$ méthode : Chaque « journée de championnat » il y a 8 matches ; puisque chaque équipe joue 30 matches : 15 « Aller » et 15 « Retour » , il y a 30 « journées de championnat » ; donc 8 x 30 = 240 .

Commentaire :

Appelons A l'ensemble des seize équipes A = { E_1 , E_2, ... , E_{16} } .
Un match est un couple d'éléments de A deux à deux distincts (E_i , E_j) avec $i \neq j$.
Un couple d'éléments deux à deux distincts de A est **un arrangement de 2 éléments de A** .

Définition :

Soit A un ensemble de n éléments ($n \in IN^*$) .
Soit $p \in IN$; $1 \leq p \leq n$.
On appelle arrangement de p éléments de A tout p – uplet d'éléments deux à deux distincts de A .
Un p – uplet d'éléments de A deux à deux distincts est (x_1 , x_2 , x_3 , ………. , x_p) avec $x_i \neq x_j$
$1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq p$.

Remarque : Un arrangement de p éléments parmi n est un ordre sur p éléments choisis parmi n éléments .

Exercice 1 :

Déterminer le nombre de mots de quatre lettres différentes que l'on peut former avec les lettres du mot CONFLIT .
Le nombre de mots de quatre lettres différentes parmi les sept lettres du mot CONFLIT est égale au nombre d'arrangements de 4 lettres choisies parmi 7 .
C'est donc 7 x 6 x 5 x 4 = 1840 .

Notation :

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble de n éléments est noté A_n^p

Théorème :

$n \in IN^*$; $p \in IN$; $1 \leq p \leq n$.

$A_n^p = n \times (n-1)(n-2) \times .... \times (n-p+1)$; c'est un produit de p facteurs naturels décroissants à partir de n .

Exemples :

$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$; $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$.

Exercice 2 :

On revient à l'énoncé de l'exercice 2 , combien de mots de quatre lettres différentes contiennent seulement des consonnes ?

Le mot CONFLIT contient ………. consonnes sont : ………………………

……
……
………………………………………………...

Conclusion :

Choisir p éléments dans un ensemble de n éléments **ET** leur imposer un **ordre** , c'est fabriquer un **arrangement** de p éléments pris parmi n .

➢ **L'ordre intervient et il n'y a pas de répétition d'éléments .**

Exercices d'applications :

1- On donne n points distincts . Calculer le nombre de bipoints non nuls que l'on peut former avec ces n points .

2- Quinze chevaux participent de bout en bout à une course . Dénombrer le nombre de tiercés dans l'ordre (on suppose qu'il n'y a pas d'ex-aequo) .

3- Une société comprend 50 personnes . Combien peut – on former de bureaux comprenant un président , un secrétaire , un trésorier ?

4- Combien y a- t- il de nombres de trois chiffres écrits avec trois chiffres différents choisis parmi les cinq chiffres : 2 , 3 , 7 , 5 , 8 .

5- On place dans une boîte , 26 papiers portant chacun le nom d'un élève de la classe . (On suppose qu'il n'y a pas des élèves ayant même nom)

On tire deux papiers **successivement et sans remise** dans la boîte .

a- Déterminer le nombre des tirages possibles .

b- Dénombrer les tirages pour lesquels le nom du 1ér papier est , dans l'ordre alphabétique , avant le nom du 2ème papier .

II. Permutations :

Exercice 1 :

1. Combien de classements peut – on former avec les 26 élèves de la classe ? (On suppose qu'il n'y a pas d'ex – aequo) .
2. Combien peut – on former de mots avec toutes les lettres du mot ROI , chaque lettre sera utilisée une seule fois ? (les mots peuvent avoir un sens ou non) .

Réponses :

1. Un classement est un arrangement de 26 éléments pris parmi les 26 élèves , donc le nombre de classements qu'on peut former est $A_{26}^{26} = 26 \times 25 \times 24 \times .... \times 2 \times 1$

   Ce nombre est appelé nombre de **permutations** de 26 éléments .

2. ……
   ……………………………………………………………………………

Définition :

A étant un ensemble de n éléments ($n \in IN^*$) , on appelle **permutation** de n éléments de A , tout arrangement de n éléments de A .

Le nombre de permutations de n éléments est alors $A_n^n = n \times (n-1) \times ...... \times 2 \times 1$, ce nombre est noté $n!$ et se lit **factorielle n**

Exemples :

1! = 1 ; 2! = 2x1 = 2 ; 3! = 3x2x1 = 6 ; 4! = 4x3x2x1 = 24 ; 5! = 5x4x3x2x1 = 120 .

Par convention : On pose 0! = 1 .

Exercice 2 :

1. Calculer : 7! ; 4! x 6! ; $\frac{5!}{2!}$; $\frac{8!\text{x}21!}{8\text{x}20!}$
2. Montrer que pour $n \geq 2$ on a : $n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)!$
3. Simplifier les expressions : $\frac{n!}{(n-1)!}$; $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$; $\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!}$
4. Montrer que $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ avec $(n, p) \in IN^2$ et $1 \leq p \leq n$

III. Combinaisons :

Exercice 1 :

Combien l'ensemble A = { a , b , c , d } a – t – il de parties à 2 éléments ? à 3 éléments ? à 1 élément ?

Solution :

- Les parties à 2 éléments que l'on peut former à partir de l'ensemble { a , b , c , d } sont :
  { a , b } ; { a , c } ; { a, d } ; { b , c } ; { b , d } ; { c , d }
  Leur nombre est 6 .
  Chacune des paires précédentes est dite une **combinaison de deux éléments de A .**
  Leur nombre se note : C_4^2 on a alors : $C_4^2 = 6$
- Les parties à 3 éléments que l'on peut former à partir de l'ensemble A sont :
  { a , b , c } ; { a , b , d } ; { a , c , d } ; { b , c , d }
  Chacun des sous ensembles précédents est une **combinaison de trois éléments de A .**
  Leur nombre est égal à : $C_4^3 = 4$.
- Il en est de même pour les parties à 1 élément de A . C'est à dire $C_4^1 = 4$.
- Vérifier que : $C_4^2 = \frac{A_4^2}{2!}$; $C_4^3 = \frac{A_4^3}{3!}$; $C_4^1 = \frac{A_4^1}{1!}$

Définition :

Une partie à p éléments d'un ensemble de n éléments (p ≤ n) est appelée **combinaison** de p éléments pris parmi n .

Remarque :

L'ordre n'intervient pas et il n'y a pas de répétition d'éléments .

Théorème : Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments (p ≤ n) est notée C_n^p et il est égal à $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$

Exercice 2 :

Quinze chevaux participent de bout en bout à une course . Dénombrer le nombre de tiercés dans le désordre . (On suppose qu'il n'y a pas d'ex – aequo.) Comparer au résultat de l'exercice 2 page 2 .

Exercice3 :

1. Une assemblée de 16 personnes veut désigner une délégation de 3 personnes parmi ses membres. Dénombrer les délégations possibles .
2. On veut élire un comité de 4 personnes choisies parmi 12.
   a- De combien de manières peut – on former ce comité ?
   b- De combien de manières si Monsieur X refuse de siéger avec Monsieur Y ?

Exercice 4 :

Une boîte contient 5 boules rouges et 3 boules blanches indiscernables au toucher , on tire **simultanément** 3 boules de cette boîte.

1. Quel est le nombre de tous les tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ?
3. Quel est le nombre de tirages d'une boule blanche et 2 boules rouges ?
4. Quel est le nombre de tirages comportant au moins une boule blanche ?
5. Quel est le nombre de tirages comportant au plus une boule blanche ?

Propriétés :

1. Pour tout $n \in IN^*$ on a : $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

2. Pour tout $n \in IN^*$ et $p \in IN$; $p \le n$ on a : $C_n^p = C_n^{n-p}$

3. Pour tout $n \in IN^*$; $p \in IN^*$ tel que $p \le n-1$ on a : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

Exercice 5 :

1. Résoudre dans IN^* , $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$.

2. Calculer le plus simplement possible $C_5^5 \times C_5^0 + C_5^1 \times C_5^4 + C_5^2 \times C_5^3$.

3. Calculer la valeur du quotient $\dfrac{C_n^1 \times C_{2n}^2}{C_{3n}^3}$; Trouver la limite de ce quotient si n tend vers l'infini.

IV. Formule du binôme de Newton :

Exercice 1 : Soient a et b deux réels.

Développer $(a+b)^2$; $(a+b)^3$; $(a+b)^4$.

1. Vérifier que

$$(a+b)^2 = C_2^0 \times a^2 \times b^0 + C_2^1 \times a^1 \times b^1 + C_2^2 \times a^0 \times b^2$$
$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3$$
$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4$$

Formule du binôme :

$n \in IN^*$; $(a , b) \in IR^2$.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots\dots + C_n^p a^{n-p} b^p + \dots\dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$$
$$= \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

Démonstration : (par récurrence).

Conséquence : $(a-b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p (-1)^p a^{n-p} b^p$

Exemples : Développer $(a+b)^5$ et $(a+b)^6$ puis $(a-b)^5$ et $(a-b)^6$

Remarque : Pour obtenir facilement des C_n^p , pour n petit, **le triangle de Pascal.**

n = 0	C_0^0	1
n = 1	C_1^0 C_1^1	1 1
n = 2	C_2^0 C_2^1 C_2^2	1 2 1
n = 3	C_3^0 C_3^1 C_3^2 C_3^3	1 3 3 1
n = 4	C_4^0 C_4^1 C_4^2 C_4^3 C_4^4	1 4 6 4 1
n = 5	……………………………	1 5 10 10 5 1
n = 6	……………………………..	1 6 15 20 15 6 1

Ce triangle est un résultat de la **formule de Pascal :** $C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}=C_{n}^{p}$.

Exercice 2 :

1. Développer $(x+1)^6$; $(x-1)^6$; $(2x+3)^5$ et $(2x-3)^5$
2. Démontrer que : $C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=2^5$
3. Calculer les sommes :

$C_n^0+C_n^1+C_n^2+.....+C_n^p+.......+C_n^n$

$C_n^0-C_n^1+C_n^2+.....+(-1)^pC_n^p+.......+C_n^n$

$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+.....+2^pC_n^p+.......+2^nC_n^n$

V. Nombre de parties d'un ensemble fini :

Soit A un ensemble fini de n éléments ; n $\in$ IN*
Une partie de p éléments de A est une ………………… de p éléments choisis parmi les n éléments de A.
Le nombre de parties de p éléments de A est ……….
Le nombre de toutes les parties de A est : ……………………………………………

Théorème :
A étant un ensemble contenant n éléments ; n $\in$ IN
Le nombre de parties de A est 2^n
L'ensemble des parties de A est noté P(A).

Exemple :
Soit A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Le nombre de parties de A est …………….

VI. Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini :

Exercice 1 :
Soit A = {1, 2, 3} ; B = {a ,b}
Trouver toutes les applications de A vers B.
Solution :
Pour chacun des 3 éléments de A , il y a 2 choix possibles.
Le nombre de toutes les applications de A vers B est $2^3=8$.

Théorème :
A et B étant deux ensembles finis de nombres d'éléments respectifs p et n $\in$ IN*
Le nombre d'applications de A vers B est n^p.
Exercice 2 :

1. Combien de numéros de téléphone à 6 chiffres peut – on former avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
2. D'un jeu de 52 cartes, on tire successivement 3 cartes. De combien de façons peut – on faire ce tirage :
   - Si l'on remet la carte dans le jeu après avoir lu ce qui était écrit.
   - Si l'on ne remet pas la carte dans le jeu ?

Résumé : On distingue trois types de tirages :

Types de tirages	Successif avec Remise	Successif sans remise	Simultané
Un résultat	Un p – uplet avec possibilité de répétition	Un p – uplet d'éléments distincts 2 à 2	Une partie de p éléments
Ordre	L'ordre intervient	L'ordre intervient	L'ordre n'intervient pas
Nombre de tirages de p éléments parmi n	n^p	A_n^p	C_n^p