Rappels sur le produit scalaire dans le plan

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini de l'une des façons suivantes :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$. Sinon $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé du plan alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$.

Extension à l'espace
Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs <u>non nuls</u> de l'espace.
Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
Alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\widehat{BAC}$
ATTENTION : dans l'espace, la notion d'angle orienté de vecteurs n'existe pas.

Propriétés 1

REGLES DE CALCUL : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel k,

$\vec{u}\cdot\vec{u} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v} = k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

REMARQUES :

Lorsque $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que $\vec{u}$ est unitaire ; $\|\vec{u}\| = 0$, si et seulement si, $\vec{u} = \vec{0}$.

Activités 2 et 3 page 179.

Propriétés 2

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, on a :

$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \ldots\ldots \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\|\vec{u}+\vec{v}\| \ldots\ldots \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

Orthogonalité et projection orthogonale sur une droite

Théorème

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux si, et seulement si, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Définition

Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace. On appelle projection orthogonale sur $\mathscr{D}$ l'application qui, à tout point M de l'espace, associe le point M' intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par M. On dit que M' est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$

Propriété

Soient A, B et C trois points tels que $A \neq B$.
Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

Activité 2 page 181.

Expression analytique

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans la base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = ………………………… ; $\left\|\vec{u}\right\|$ = ……………………………

Pour tous points $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$, $MM' =$ ……………………………………..

Activités 3 et 4 pages 184.

Applications du produit scalaire dans l'espace
Vecteur normal à un plan

DEFINITION : Soit A un point de l'espace, $\vec{n}$ un vecteur non nul et $\mathscr{P}$ un plan.
On dit que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$ si la droite $\mathscr{D}\left(A, \vec{n}\right)$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$.

PROPRIETES :

- Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}\left(A, \vec{u}, \vec{v}\right)$, si et seulement si, $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.
- Deux vecteurs non nuls $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont normaux à un même plan, si et seulement si, ils sont ………………..
- Deux droites sont orthogonales, si et seulement si, leurs vecteurs directeurs respectifs sont …………………
- Deux plans sont perpendiculaires, si et seulement si, leurs vecteurs normaux respectifs sont …………………...

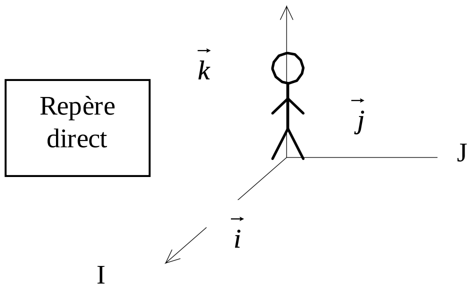
Activités 3 page 181 et 5 page 182.

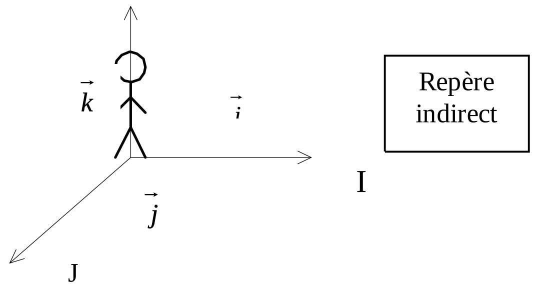
Exercice 11 page 193.

Produit vectoriel dans l'espace

Avant toutes choses, nous avons besoin dans ce paragraphe, d'orienter l'espace, c'est-à-dire distinguer les deux

types de repères suivants :





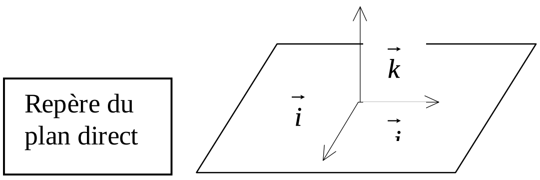
Soit un observateur se tenant debout, dans l'axe $\left(O,\vec{k}\right)$, les pieds en O et regardant le point I.

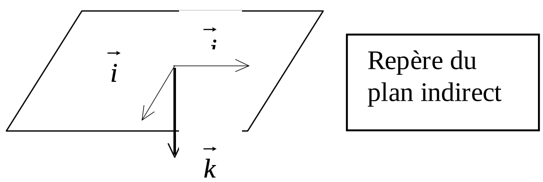
Un repère est dit "direct" si, l'observateur à le point J à sa gauche. Il est dit "indirect" dans le cas contraire.

L'espace étant orienté, il est alors possible d'orienter tout plan de l'espace :

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère d'un plan P. Soit $\vec{k}$ un vecteur normal au plan P. On dira que le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est

direct dans P lorsque le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ l'est dans l'espace :





Les bases de l'espace ou des plans s'orientent de la même façon que les repères.

Remarque :

Permuter deux vecteurs change l'orientation d'une base.

Activité 1 page 185.

Définition

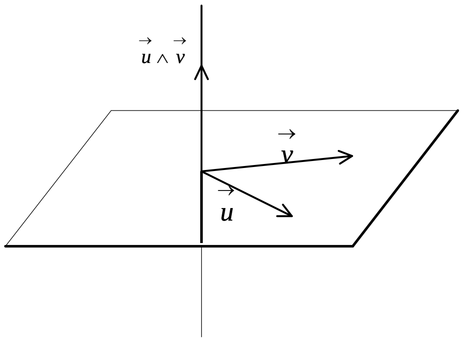
On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires (et donc non nuls) :

Rappel : le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (direction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$)
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe (sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$)
- $\| \vec{u} \wedge \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \sin(\vec{u}, \vec{v})$ (norme ou longueur de $\vec{u} \wedge \vec{v}$)



<u>Cas des vecteurs colinéaires</u> : d'après la définition, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. De plus, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires (et donc non nuls) , alors $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ puisque $\|\vec{u}\| \neq 0$, $\|\vec{v}\| \neq 0$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0\ (\pi)$.

On peut donc énoncer la conséquence suivante :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires si et seulement si } \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

Ce qui sera parfois un critère pour savoir si trois points sont alignés ou non.

<u>Propriétés</u>

<u>Antisymétrie</u> : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$.

<u>Bilinéarité</u> (linéarité par rapport aux deux variables) :

$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$ et $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$ (linéarité par rapport à la première variable)

$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda\, \vec{u} \wedge \vec{v}$ (linéarité par rapport à la seconde variable)

<u>Théorème</u>

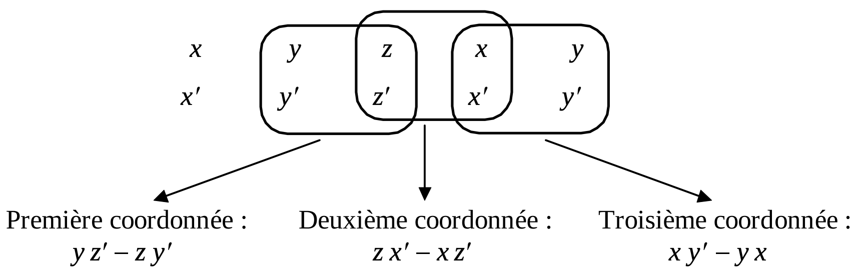
Dans un repère orthonormé direct de l'espace :

Si $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y'\,;z')$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v}\,(yz' - zy'\,;zx' - xz'\,;xy' - yx')$

Nous admettrons ce théorème.

Règle pratique pour calculer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

On écrit sur une ligne les coordonnées de $\vec{u}$ en répétant, à la suite la première et la seconde coordonnée. On procède de même avec $\vec{v}$ sur une seconde ligne. Les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont obtenues à l'aide des produits en croix suivants :



Activité 2 page 188.

Applications du produit vectoriel

Aire d'un triangle et d'un parallélogramme :

Lorsque ABC est un triangle, on a établit en deuxième que l'aire S de ABC est donné par : $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$

Ce qui s'écrit : $S = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AC} \right\| \times \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \times \left| \sin \widehat{BAC} \right| \Rightarrow$ Aire $(ABC) = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|$

De même en présence d'un parallélogramme ABCD, on a : Aire (ABCD) = $\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \right\|$.

Activité 3 page 188.

Volume d'un tétraèdre :

Activité 4 page 189.

Le volume d'un tétraèdre ABCD est V = $\frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \right) \cdot \overrightarrow{BA} \right|$

Distance d'un point à une droite :

Activité 5 page 189.

La distance d'un point A à la droite $D\left(B, \vec{u}\right)$ est d = $\frac{\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} \right\|}{\left\| \vec{u} \right\|}$