Extension de la notion de vecteur à l'espace.

La notion de vecteur du plan s'étend naturellement à l'espace : ainsi,
- Leur définition
- Leur caractérisation par direction, sens et norme
- L'égalité de deux vecteurs
- L'addition de deux vecteurs (+ relation de Chasles)
- La multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Sont des notions qui restent inchangées, que l'on se place dans le plan ou dans l'espace.

Activités 1 et 2 page 160.

Définition : vecteurs colinéaires

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, c'est-à-dire quand il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Repère cartésien d'une droite

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires est une droite, appelé droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Le couple $\left(A,\vec{u}\right)$ est appelé repère cartésien de la droite $\mathscr{D}\left(A,\vec{u}\right)$.

- M appartient à $\mathscr{D}\left(A,\vec{u}\right)$, si et seulement si, il existe un unique réel α tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\vec{u}$
- Soient A et B deux points de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors $\mathscr{D}\left(A,\vec{u}\right)$ est parallèle à $\mathscr{D}\left(B,\vec{v}\right)$, si et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Activité 3 page 162.

Définition : vecteurs coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits **coplanaires** lorsque, ayant choisi un point O quelconque, et défini les points A, B et C par $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$, on trouve que les points O, A, B et C sont coplanaires (situés dans un même plan).

Théorème : caractérisation de la coplanarité

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Alors dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires équivaut à dire qu'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ou que la famille $\left\{\vec{u} , \vec{v} , \vec{w}\right\}$ est liée.

Activité 2 page 163.

Repère cartésien d'un plan

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un plan, appelé plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le triplet $(A,\vec{u},\vec{v})$ est appelé repère cartésien du plan $\mathscr{P}(A,\vec{u},\vec{v})$.

- M appartient au plan $\mathscr{P}(A,\vec{u},\vec{v})$, si et seulement si, il existe un unique couple de réels (x,y) tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Activité 6 page 164.

- Soient A et B deux points distincts de $\mathscr{E}$ et $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient non colinéaires. Alors la droite $\mathscr{D}(A,\vec{u})$ est parallèle au plan $\mathscr{P}(B,\vec{v},\vec{w})$, si et seulement si, la famille $\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{w}\}$ est liée.
- Soient A et B deux points distincts de $\mathscr{E}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et $\vec{u}\,'$ et $\vec{v}\,'$ deux vecteurs non colinéaires. Alors
  $\mathscr{P}(A,\vec{u},\vec{v})$ et $\mathscr{P}'(B,\vec{u}\,',\vec{v}\,')$ sont parallèles, si et seulement si, $\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{u}\,'\}$ et $\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{v}\,'\}$ sont liées.

Exercices 4 et 5 page 172.

Définition :

Un repère de l'espace est la donnée d'un point O appelé **origine** du repère, et de trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ formant ce que l'on appelle une **base**.
Soient I, J et K les trois points de l'espace tels que $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$
$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est dit repère orthogonal de l'espace si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont perpendiculaires deux à deux. Si de plus OI = OJ = OK = 1 le repère est dit orthonormé.

Théorème – définition :

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, à tout point M on peut associer un (et un seul) triplet de nombres (x,y,z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
On note M(x,y,z) où x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z est la cote du point M.
Le triplet (x,y,z) est appelé triplet de coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur. Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, notons M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
M a pour coordonnées (x,y,z) dans ce repère, d'où $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

On dit que **le vecteur** $\vec{u}$ **a pour coordonnées** (x,y,z) dans ce repère. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Dire que $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont égaux revient à dire que $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$

- $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs. Alors pour tout réel k, on a $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$ et $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$
- Si $\mathrm{M}(x,y,z)$ et M’(x',y',z') sont deux points de l’espace, alors $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$
- Si $\mathrm{M}(x,y,z)$ et M’(x',y',z') sont deux points de l’espace, alors le milieu I de [MM’] a pour coordonnées $I\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$
- $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$, on appelle déterminant de $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ le réel noté $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$ défini par $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$.

Activités 1 page 168.

Exercice :

Soit $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une base de l’espace.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l’espace tel que : $\vec{u}=3\vec{i}-9\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{v}=3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{w}=2\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$.
Les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont – ils coplanaires ?