CH5 – Géométrie :
Nombres complexes

Janvier 2010
A. LAATAOUI

1) DEFINITION - REPRESENTATION GEOMETRIQUE

Définition :

On appelle **corps des nombres complexes**, et on note ℂ un ensemble contenant ℝ tel que :

- Il existe dans ℂ un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de ℂ s'écrit sous la forme $a + b\,i$, où a et b sont des réels.
- ℂ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de ℝ, et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z.

Nombres complexes particuliers :

Soit un nombre complexe $z = a + b\,i$ avec $a \in$ ℝ et $b \in$ ℝ.

- si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel. (ℝ est contenu dans ℂ)
- si $a = 0$, on a $z = b\,i$, on dit que z est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

Remarques :

- ℝ correspond à l'ensemble des points sur une droite. Un nombre réel x correspond au point d'abscisse x sur la droite.
  On peut donc toujours comparer deux nombres réels :
  si x et y sont des réels, on a nécessairement $x \leq y$ ou $y \leq x$ (Le point d'abscisse x se trouve, sur la droite, "avant" ou "après" le point d'abscisse y)
- ℂ, ensemble des nombres $a + b\,i$ avec $a \in$ ℝ et $b \in$ ℝ correspond à l'ensemble des points d'un plan.
  Un nombre complexe $a + b\,i$ avec $a \in$ ℝ et $b \in$ ℝ correspond au point du plan de coordonnées (a ; b).
  On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans ℂ.
  On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe z est inférieur à un nombre complexe z' ou qu'un nombre complexe z est positif.

Propriété

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + bi$, où a et b sont des réels, est unique.

Définition

Soit un nombre complexe z .
L'écriture $z = a + bi$, où a et b sont des réels, est appelée forme algébrique du nombre complexe z.
a est appelé **partie réelle** de z, et b **partie imaginaire** de z.
On *note* $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Remarques :

- La partie réelle de z est un nombre réel.
- La partie imaginaire de z est un nombre réel.

Propriété

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
C'est-à-dire que si a , b , a' , b' sont des réels, on a

$$a + bi = a' + b'i \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

www.devoir@t.net

Exemple : Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$. Calculer et écrire sous la forme algébrique :

$z + z' =$ $\qquad$ $z - z' =$

$2z - 3z' =$ $\qquad$ $z.z' =$ $\qquad$ $z^2 =$

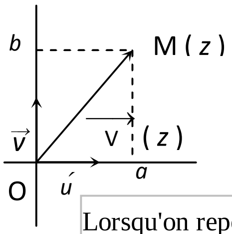
Définition

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Au point M de coordonnées $(a\,;\,b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.
On dit que $z = a + bi$ est **l'affixe** de M ou que M$(a\,;\,b)$ est **l'image ponctuelle** de $z = a + bi$.

Au vecteur $\overrightarrow{V}$ de coordonnées $(a\,;\,b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.

On dit que $z = a + bi$ est **l'affixe** de $\overrightarrow{V}$ ou que $\overrightarrow{V}(a\,;\,b)$ est **l'image vectorielle** de $z = a + bi$.

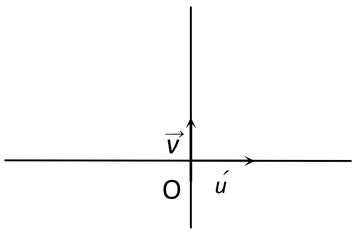


Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormé direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.

Exemple : Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :

$z_1 = 2 + 2i$; $z_2 = 3 + i$; $z_3 = -1 + 2i$; $z_4 = 2 - i$

$z_5 = i$ $\quad z_6 = -i$; $z_7 = 1$; $z_8 = -i - 3$



Propriétés

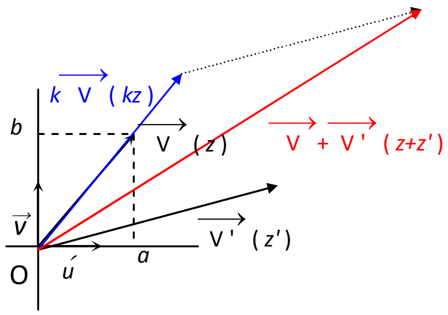
Si M a pour affixe $z = a + bi$ et si M' a pour affixe $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$
- $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$
- le milieu I de [MM'] a pour affixe $z_I = \dfrac{z + z'}{2}$
- le barycentre G de $(M\,;\,\alpha)$ et $(M'\,;\,\beta)$ a pour affixe $z_G = \dfrac{\alpha z + \beta z'}{\alpha + \beta}$ $(\alpha + \beta \neq 0)$

(Cette formule se généralise au barycentre de n points pondérés)

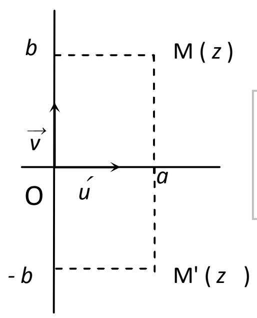
Propriétés

- Si $\overrightarrow{V}$ a pour affixe z et $\overrightarrow{V'}$ pour affixe z', alors $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{V'}$ a pour affixe $z + z'$.
- Si k est un réel, alors $k\overrightarrow{V}$ a pour affixe kz.



Définition

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + bi$.
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que $\overline{z} = a - bi$.



Si M est le point d'affixe z, le point M' d'affixe $\overline{z}$ est symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

www.devoir@t.net

Exemple : Soit $z = 3 + 5\,i$ et $z' = -2 + 3\,i$. Calculer :

$\overline{z}$ = $\overline{z'}$ = $\overline{z} + \overline{z'}$ = $z + z'$ =

$\overline{z + z'}$ = $\overline{z}.\overline{z'}$ = zz' = $\overline{zz'}$ =

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z\,.\,\overline{z}$ est un réel positif
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- Si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\text{Re}\,(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$; $\text{Im}\,(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\,i}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$; $z \in i\,\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Remarque : La propriété $z.\overline{z} \in \mathbb{R}_+$ sera utile pour trouver les formes algébriques d'inverses et de quotients.

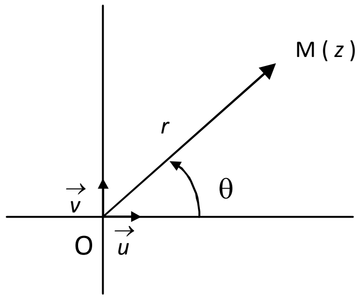
Exemple : $\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+2i-1}{4-i^2} = \frac{1+3i}{4+1} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\,i$

2) FORME TRIGONOMETRIQUE - MODULE - ARGUMENT

A) FORME TRIGONOMETRIQUE

Rappel :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Soit M (a ; b) un point du plan (distinct de O) .



On a alors $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
$a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$

$z = a + ib$

On appelle **coordonnées polaires** de M , tout couple de nombres réels (r , θ) tel que :

$r = OM$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2\,k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Remarque :
Soit M le point d'affixe x avec $x \in \mathbb{R}$, on a $r = OM = |\,x\,|$

Définition

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :
$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
On dit que $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ est une **forme trigonométrique** de z.

Propriété

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'\,(\cos\theta' + i\sin\theta')$, on a :

$$z = z' \Leftrightarrow r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = r'\,(\cos\theta' + i\sin\theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \quad [\,2\pi\,] \end{cases}$$

www.devoir@t.net

B) MODULE

Définition

Soit le nombre complexe z de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z.
On appelle **module** de z le nombre réel positif $r = \mathrm{OM} = \sqrt{a^2 + b^2}$. On note $r = |z|$.

Remarque :

La notation $|z|$ ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque x est un nombre réel, on a $r = \mathrm{OM} = |x|$.
Pour un réel x , $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x" ou "module de x".
Pour un nombre complexe non réel z , $|z|$ sera lu impérativement "module de z".

Exemple : - Calculer le module de $z_1 = 3 + 4i$: - Donner la forme trigonométrique de $z_2 = \sqrt{3} + i$:

Propriétés

- Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixe z , on a $\|\overrightarrow{V}\| = |z|$
- Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B , on a $\mathrm{AB} = |z_B - z_A|$.

Propriétés

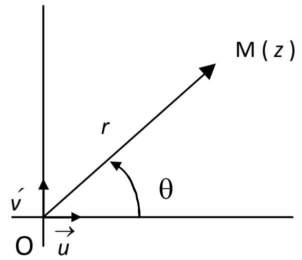
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|-z| = |z|$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z z'| = |z| . |z'|$
- si $z' \neq 0$ $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$
- si $z' \neq 0$ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $z\overline{z} = |z|^2$ (on retrouve $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$)
- si $z \neq 0$ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

C) ARGUMENT

Définition

Soit le nombre complexe non nul z de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z.

On appelle **argument** de z tout nombre réel θ tel que $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})$ $[2\pi]$.
On note $\theta = \arg(z)$



Remarque :

θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) c'est-à-dire modulo 2π .

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ' . On a :

- $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$ $\qquad \arg(zz') = \arg z + \arg z'$ $[2\pi]$
- $\dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos(\theta) + i\sin(-\theta)$ $\qquad \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z$ $[2\pi]$
- $\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta' + i\sin\theta'} = \cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')$ $\qquad \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$ $[2\pi]$
- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $\qquad \arg(z^n) = n\arg z$ $[2\pi]$

www.devoir@t.net

- $\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$ $\arg(\overline{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$
- $-(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)$ $\arg(-z) = \arg z + \pi \quad [2\pi]$

Propriétés

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique. $\overline{z}$ et $-z$ ont pour formes trigonométriques :

$$\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \quad \text{et} \quad -z = r(\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi))$$

www.devoir@t.net