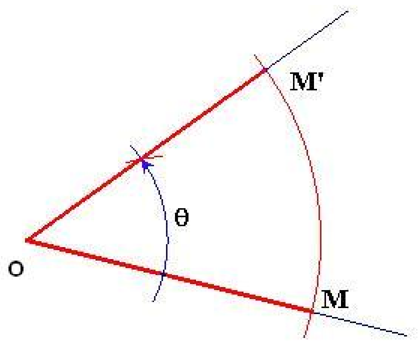
1) DEFINITIONS

Dans un plan P orienté dans le sens direct sont donnés un point O et un angle θ . On appelle rotation de centre O et d'angle θ la fonction $R_{(O,\theta)}$ du plan P dans lui-même qui au point **M** associe le point **M'** vérifiant:

$$\begin{cases} OM' = OM \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$$

Le point O et le réel θ sont dits les éléments caractéristiques de $R_{(O,\theta)}$.



Cas particuliers

Des valeurs particulières de l'angle de rotation conduisent à des situations très particulières.
Soit O le centre de rotation:

- Angle de rotation nul:

Cette rotation fait correspondre chaque point d'une figure à lui même. ***La figure est invariante point par point.***

- Angle de rotation égal à π :

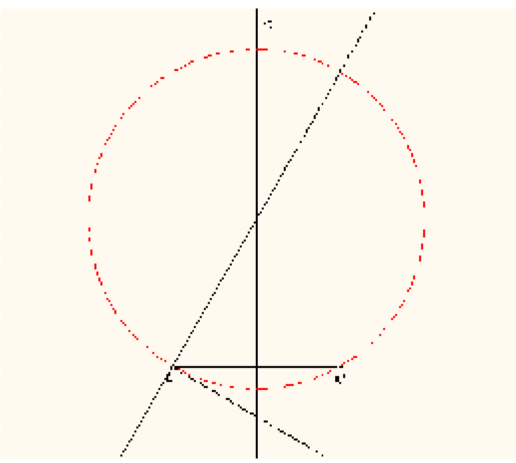
Soit A' l'image du point A. Nous avons donc OA=OA' et l'angle AÔA' est plat (=180°)
Comme les points A, O et A' sont alignés et OA=OA' alors O est le milieu de [AA']. Ce qui signifie que A' est le symétrique de A par rapport à O. Et ceci quelque soit le point A.
Nous retrouvons la propriété fondamentale des symétries centrales.
Pour un angle de rotation de 180° (ou -180°) nous obtenons une symétrie centrale de centre O

Vocabulaire

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit θ un réel de l'intervalle $]-\pi,\pi]$. Ω un point du plan et R la rotation de centre Ω et d'angle θ .

- Si $\theta \geq 0$, on dit que R est une rotation directe.
- Si $\theta \leq 0$, on dit que R est une rotation indirecte.



Activité 2 page 72.

1) **a.** O est le milieu de [AA'].

b. Si $\theta \neq k\pi$, alors $\begin{cases} OA = OA' \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} O \in méd\,[AA'] \\ et \\ O \in \xi \end{cases}$

2) l’unicité du point O entraine l’unicité de la rotation.
3) Déjas fait en 1) b.

Une rotation est parfaitement déterminée par la donnée de son angle et celle d’un point et son image.

Activités 3 et 4 page 73.

Réciproque d’une rotation

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit O un point du plan, $\boldsymbol{\theta}$ un réel et R la rotation de centre O et d’angle $\boldsymbol{\theta}$.

La rotation $\boldsymbol{R}_{(O,-\theta)}$ est appelée rotation réciproque de $\boldsymbol{R}_{(O,\theta)}$. De plus,

$$\boldsymbol{R}_{(O,\theta)}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M}', \text{ si et seulement si, } \boldsymbol{R}_{(O,-\theta)}(\boldsymbol{M}') = \boldsymbol{M}$$

2) PROPRIETES D’UNE ROTATION

A) DEFINITION D’UNE ISOMETRIE

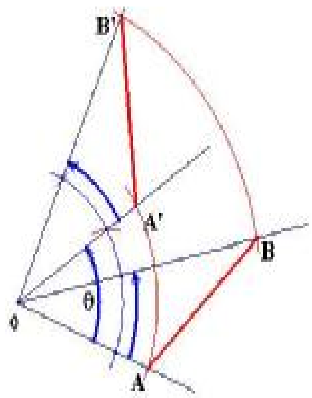
Soit f une application du plan dans lui-même.

On dit que f est une isométrie du plan si pour tous points M et N d’images respectives M’ et N’, on a MN = M’N’.

Exemples :

La symétrie orthogonale, la symétrie centrale et la translation sont des isométries du plan.

Activité 2 page 74.



1) *a. Si A = O, alors A’ = O et parsuite on a :* $\underbrace{\overrightarrow{OA}}_{\vec{0}}\cdot\overrightarrow{OB}=0=\underbrace{\overrightarrow{OA'}}_{\vec{0}}\cdot\overrightarrow{OB'}$.

b. Si A et B sont distincts de O, alors

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OA}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv-\theta+\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)+\theta\,[2\pi]\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$$

c.

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OB\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=OA'\times OB'\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}}\right).$$
$$=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}$$

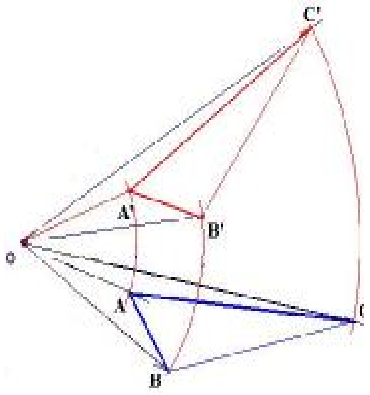
2) *a.* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=OA^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$.

b. D’après 1) on a $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OC'}$ *et* $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OC'}$ *donc*

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = OA^2 - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$
$$= OA'^2 - \overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OC'}$$
$$= \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'C'}$$

c. Si on pose C = B, alors 2) donne

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow AB^2 = A'B'^2 \Leftrightarrow AB = A'B'$$



Théorème

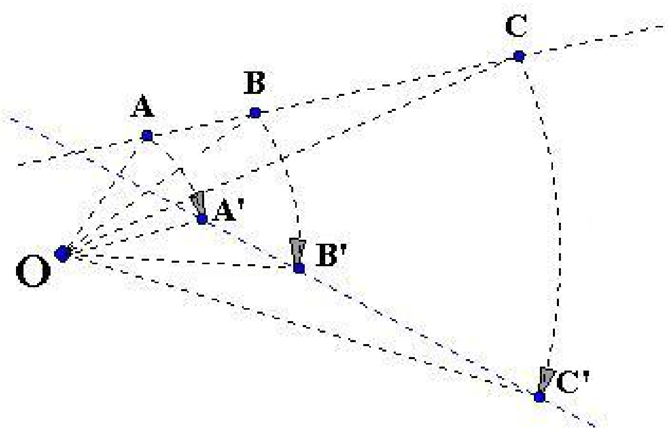
Toute rotation conserve le produit scalaire et les distances. Ainsi, toute rotation est isométrie.

B) ROTATION ET ALIGNEMENT

Rappels:

Si A, B et C,dans cet ordre, sont alignés alors AB+BC=AC. (cas particulier des inégalités triangulaires) et sa réciproque: Si AB+BC=AB alors A, B et C sont alignés.

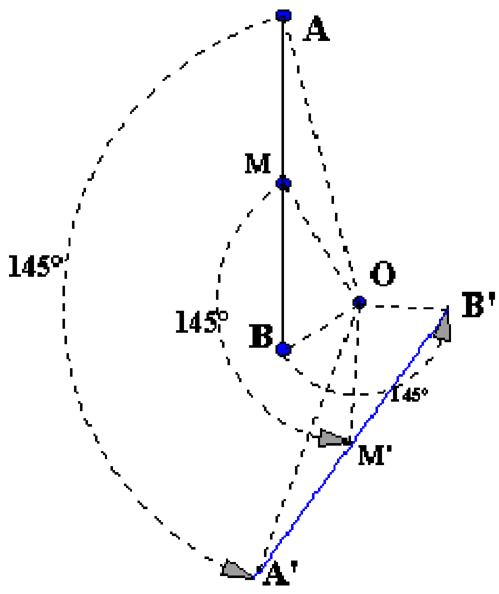
Soient les points alignés A, B et C et leurs images A', B' et C' par la rotation de centre **O** et d'angle θ .
Comme les rotations conservent les distances alors AB=A'B', BC=B'C' et AC=A'C'.
Comme A, B et C sont alignés alors AB+BC=AC.
Si nous remplaçons AB, BC et AC par les valeurs égales, respectivement, A'B', B'C' et A'C', nous obtenons A'B'+B'C'=A'C'.
Comme A'B'+B'C'=A'C' alors A', B' et C' sont alignés. Ce qui prouvent que:



Les rotations conservent les alignements

Image du milieu d'un segment:

Soient le segment[AB] et son milieu M.
A' et B' sont les images de A et B par la rotation de centre **O** et d'angle θ .



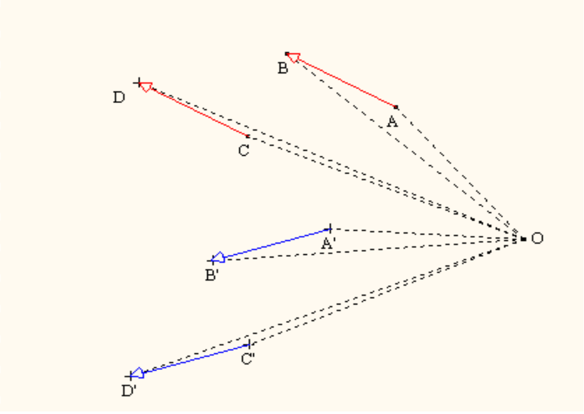
Comme M est le milieu de [AB] alors A, M et B sont alignés et AM=MB.
Comme les rotations conservent les alignement alors les images A', B' et M' sont alignés.
Comme les rotations conservent les distances alors AM=A'M', MB=M'B'. Donc A'M'=M'B'.
Comme A', M' et B' sont alignés et A'M'=M'B' alors M' est le milieu de [A'B'].

L'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image

C) ROTATION ET ANGLES ORIENTES

Activité 4 page 75.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (A,B) \text{ est équipollent à } (C,D) \Leftrightarrow A*D = B*C$$
$$\Leftrightarrow A'*D' = B'*C' \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$$



Activité 5 page 75.

1) $\begin{cases} R(O) = O \\ R(E) = E' \\ R(A) = A' \Rightarrow \overrightarrow{OE'} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OE'}\right)}[2\pi] \equiv \theta[2\pi] \\ R(B) = B' \\ \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB} \end{cases}$

2) $$\widehat{\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}\right)}[2\pi]$$
$$\equiv -\theta + \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)} + \theta[2\pi] \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)}[2\pi].$$

Théorème

Le plan est orienté dans le sens direct.

R est la rotation de centre O et d'angle θ .

- Pour tous points A et B d'images respectives A' et B' par R, $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)} \equiv \theta[2\pi]$.

- Pour tous points A, B, C et D tels que A $\neq$ B et C $\neq$ D, d'images respectives A', B', C' et D' par R, $\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)[2\pi]$

  Les rotations conservent les mesures des angles orientés.

__**Activités 6 et 7 page 76.**__

D) ROTATION ET EGALITES VECTORIELLES

__**Activité 9 page 76.**__

$\overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{OE'}=x\overrightarrow{C'D'}$.

1) $OE'=|x|C'D'=|x|CD=OE$.

   $\left(\widehat{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OE'}}\right)\equiv\left(\widehat{x\overrightarrow{CD},x\overrightarrow{C'D'}}\right)[2\pi]\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{C'D'}}\right)[2\pi]\equiv\theta[2\pi]$

   $\Rightarrow$ R(E) = E'.
2) $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OE}\Leftrightarrow\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{OE'}\Leftrightarrow\overrightarrow{A'B'}=x\overrightarrow{C'D'}$

__**Théorème**__

Le plan est orienté dans le sens direct.

R est la rotation de centre O et d'angle θ .

Pour tous points A, B, C et D d'images respectives A', B', C' et D' par la rotation R, et pour tout réel x ,
$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{CD}$, si et seulement si, $\overrightarrow{A'B'}=x\overrightarrow{C'D'}$

Toute rotation conserve les égalités vectorielles.

__**Conséquences**__

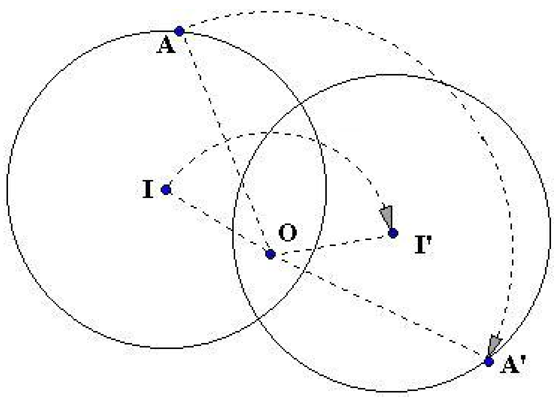
- Toute rotation conserve le barycentre de deux points.
- L'image d'une droite par une rotation est une droite.
- L'image d'un segment par une rotation est un segment qui lui est isométrique.
- Toute rotation conserve le parallélisme et l'orthogonalité de deux droites.

E) ROTATION ET CERCLE

L'image d'un cercle par une rotation est un cercle qui lui est isométrique, et de centre l'image du centre

Si D est tangente à ζ en A alors son image D' est tangente à ζ ' en A'.

Toute rotation conserve le contact



F) PROPRIETE CARACTERISTIQUE D'UNE ROTATION

Activité 3 page 79.

A $\neq$ B et AB = CD.

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
   a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ donc La translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ transforme A en C et B en D.
   b. S'il existe une rotation qui A en C et B en D alors son angle est $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv 0[2\pi]$ c'est donc l'identité du plan.
2) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \theta[2\pi]$.
   a. Soit R la rotation d'angle θ telle que R(A) = C.
   Supposons que R(B) = B' donc $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB'}}\right) \equiv \theta[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)[2\pi] \Rightarrow \overrightarrow{CB'}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens, de plus on a : CB' = AB = CD $\Rightarrow \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow$ B' = D.
   b. Supposons qu'il existe une autre rotation qui transforme A en C et B en D alors son angle sera θ et son centre est le point d'intersection de méd[AC] et méd[BD] ; c'est elle-même la rotation R.

Théorème

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit A, B, C et D quatre points tels que les points A et B sont distincts, AB = CD et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$.

Il existe une unique rotation qui transforme A en C et B en D, d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)$ et de centre appartenant aux médiatrices des segments [AC] et [BD].

Activités 4 et 5 page 79.

3) ROTATION ET SYMETRIES ORTHOGONALES

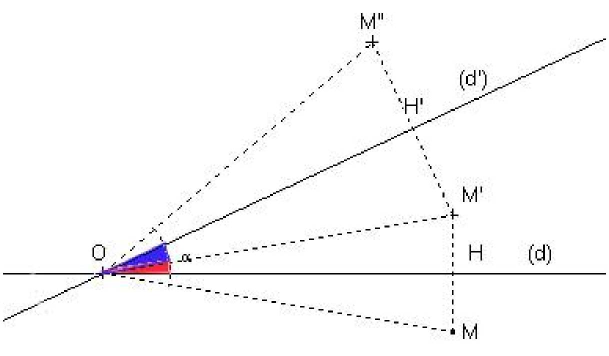
Activité 4 page 80.

Le plan est orienté dans le sens direct.

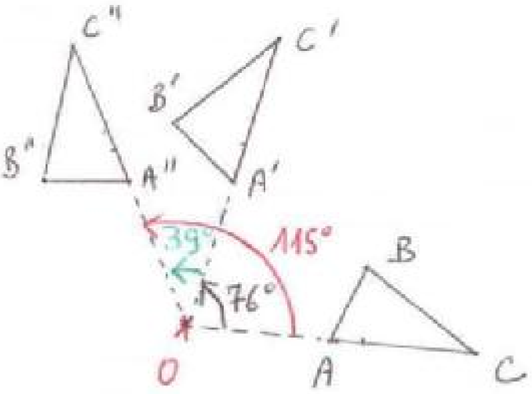
Soient (d) et (d') deux droites sécantes en un point O.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs respectifs de (d) et (d') tels que : $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) \equiv \alpha[2\pi]$.

$$S_{(d')} \circ S_{(d)} = R_{(O,2\alpha)}$$



4) COMPOSEE DE DEUX ROTATIONS DE MEME CENTRE



Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit O un point du plan, θ et θ ' deux réels.

Si R et R' sont deux rotations de même centre O et d'angles respectifs θ et θ ', alors R' $\circ$ R est la rotation de même centre O et d'angle $\theta + \theta'$.

La composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre et d'angle la somme des deux angles.

Si $\theta + \theta' \equiv 0[2\pi]$ alors R' $\circ$ R est l'identité du plan.