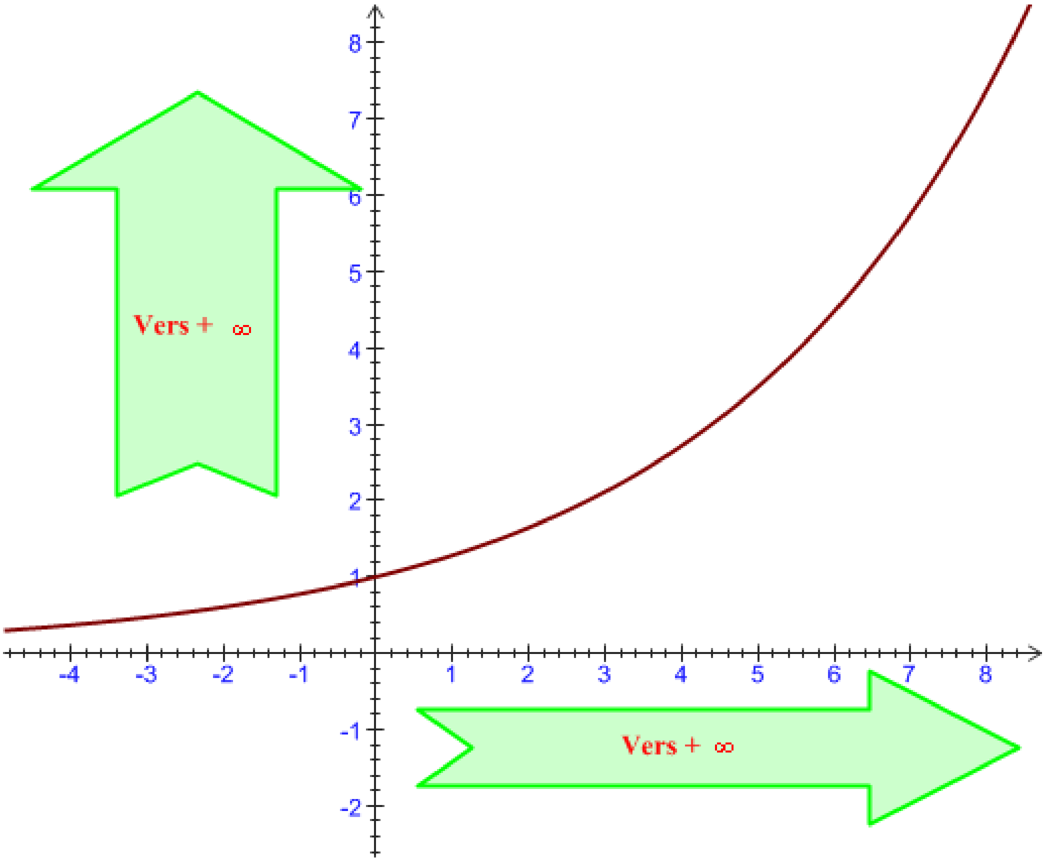
I. LIMITES EN L'INFINI

a. Limite infinie

Par exemple, considérons la fonction f dont la courbe représentative est :

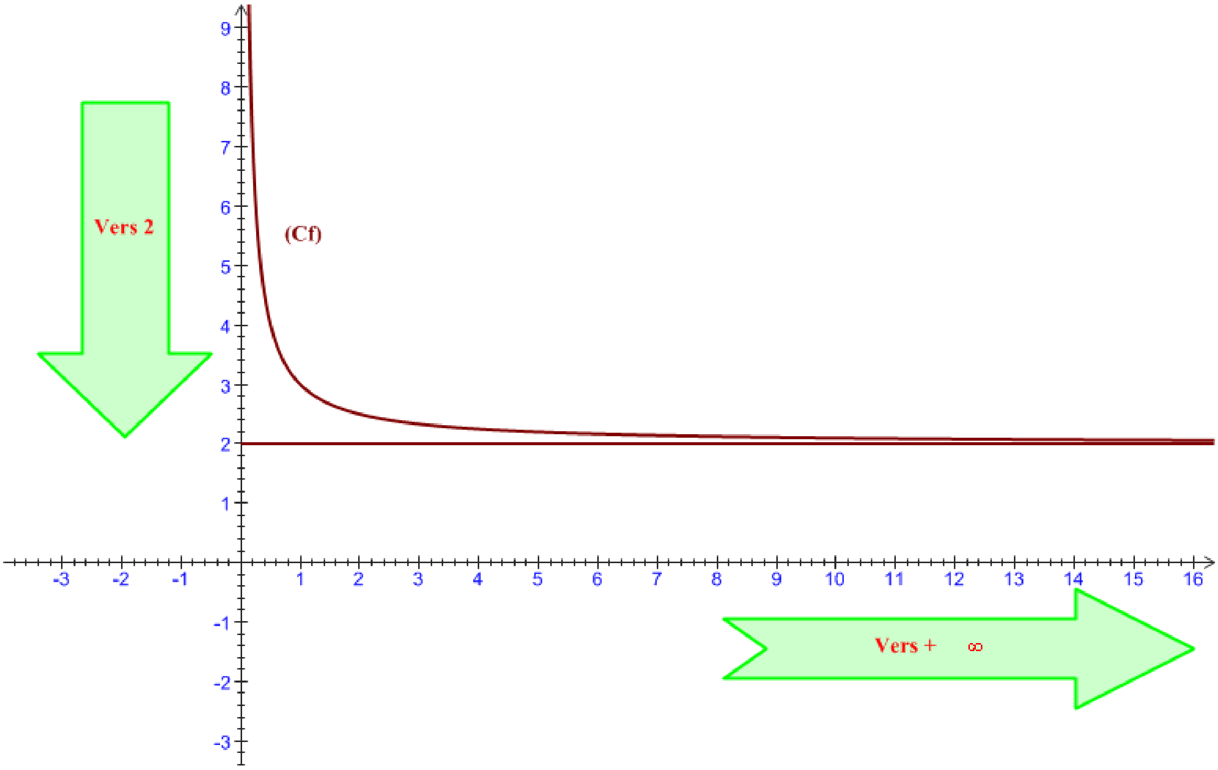


Lorsque **x** s'en va vers +∞, **f(x)** devient de plus en plus grand. il n'a aucun maximum.
On dit alors que **f(x)** tend vers +∞.
Ou que la limite de la fonction **f** lorsque **x** tend vers +∞ est égale à +∞.
Ce que l'on résume par :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

b. Limite finie

Considérons maintenant la fonction **f** dont la courbe représentative est :



Lorsque **x** s'en va vers **+∞**, **f(x)** se rapproche de plus en plus de **2**.
On dit alors que **f(x)** tend vers **2**.
Ou que la **limite** de la fonction **f** lorsque **x** tend vers **+∞** est égale à **2**.

Ce que l'on résume par :

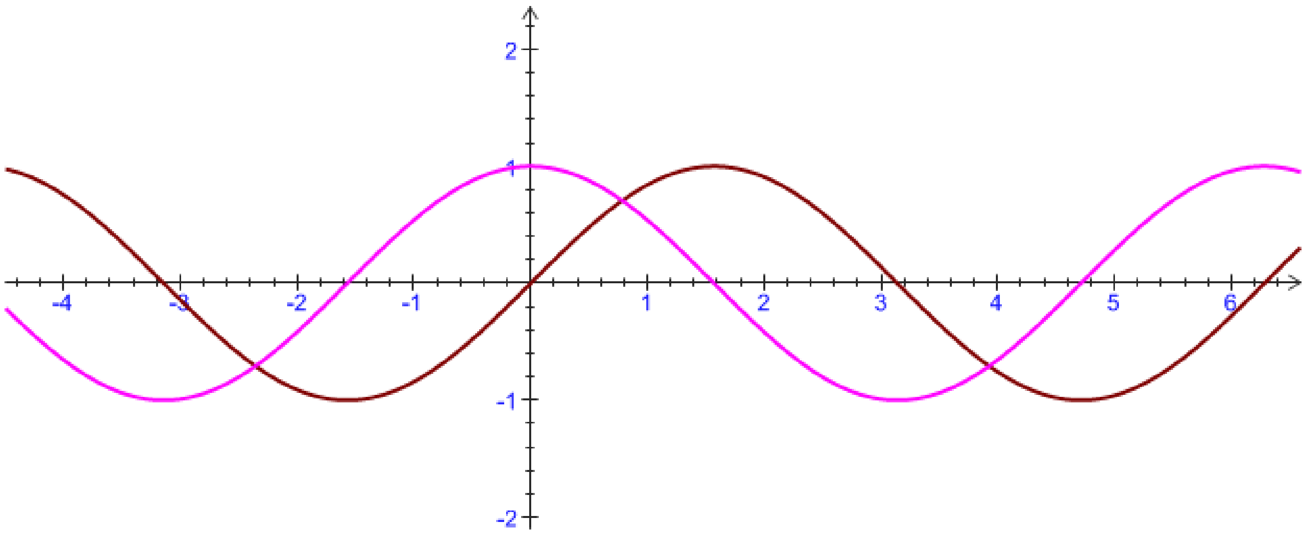
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

Note : Lorsque **x** tend vers **+∞**, la courbe de la fonction **f** se rapproche de plus en plus de la droite **D** d'équation **y = 2**.

On dit alors que **D** est une **asymptote horizontale** à la courbe de **f** au voisinage de **+∞**.

c. Sans limite !

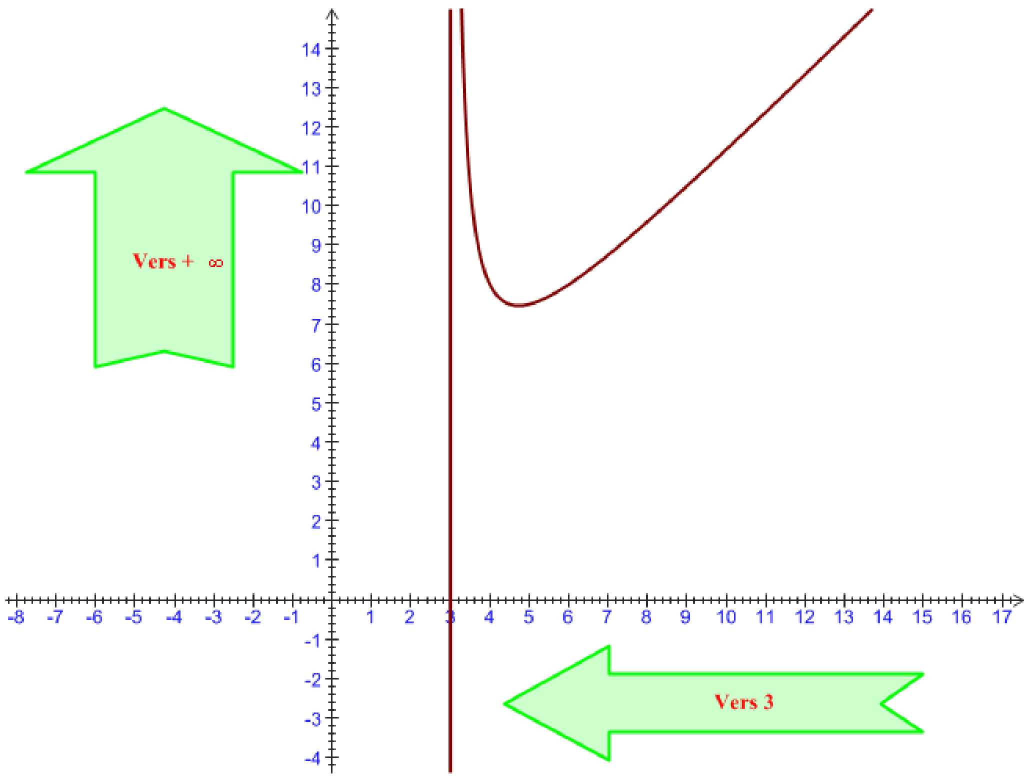
Toutes les fonctions n'admettent pas nécessairement une limite lorsque **x** tend vers $+\infty$. C'est par exemple le cas avec les fonctions sinus et cosinus :



Lorsque **x** s'en va vers $+\infty$, **sinus** et **cosinus** hésitent quant à l'attitude à adopter. Oscillant à jamais, ils n'ont aucune limite finie ou infinie...

II. LIMITES EN UN POINT

Par exemple, considérons la fonction f définie sur l'intervalle $]3\ ;+\infty[$ dont la courbe représentative est :



Lorsque **x** se rapproche de **3**, **f(x)** devient de plus en plus grand sans qu'aucun plafond ne l'arrête.
On dit alors que **f(x)** tend vers **+∞**.
Ou que la **limite** de la fonction **f** lorsque **x** tend vers **3** est égale à **+∞**.
Ce que l'on résume par :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

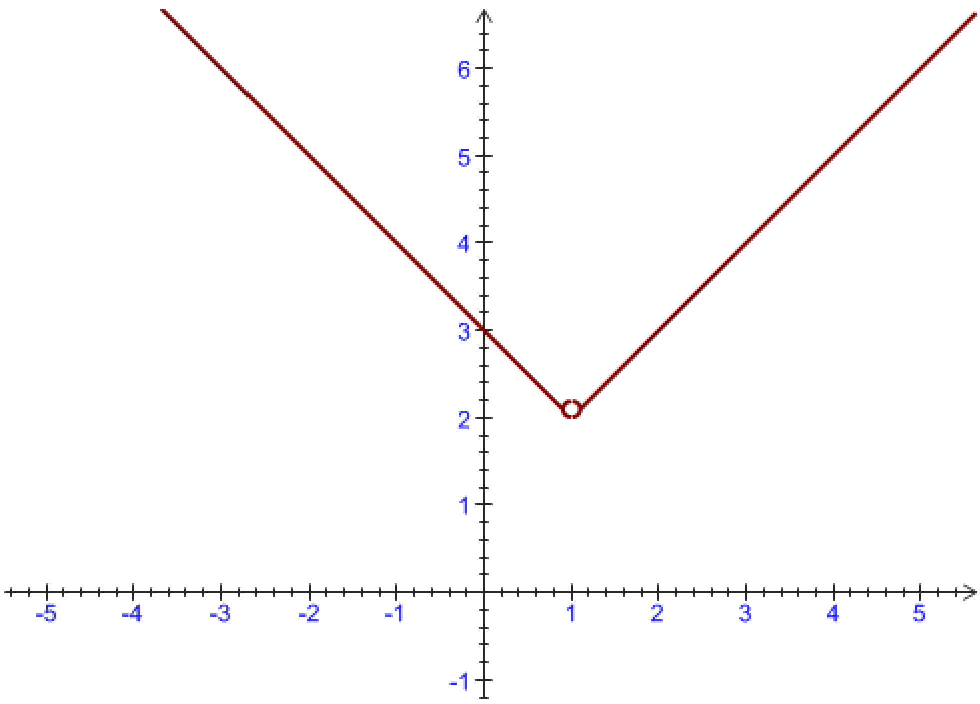
Note : Lorsque **x** tend **3**, la courbe de la fonction **f** se rapproche de plus en plus de la droite **D** d'équation **x = 3**.
On dit alors que **D** est une **asymptote verticale** à la courbe de **f** au voisinage de **3**.

Nous avons exclusivement évoqué des fonctions qui tendent vers +∞ à l'approche d'un point. Mais il existe aussi des fonctions qui ont pour limite -∞.

Limite finie en un point.

Soit $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{|x-1|} + 2, \quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Sa courbe représentative est donnée ci-dessous :



Lorsque **x** se rapproche de 1, **f(x)** devient de plus en plus proche de 2. On dit alors que **f(x)** tend vers 2.

Ou que la **limite** de la fonction **f** lorsque **x** tend vers 1 est égale à **2**.
Ce que l'on résume par : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

Théorème :

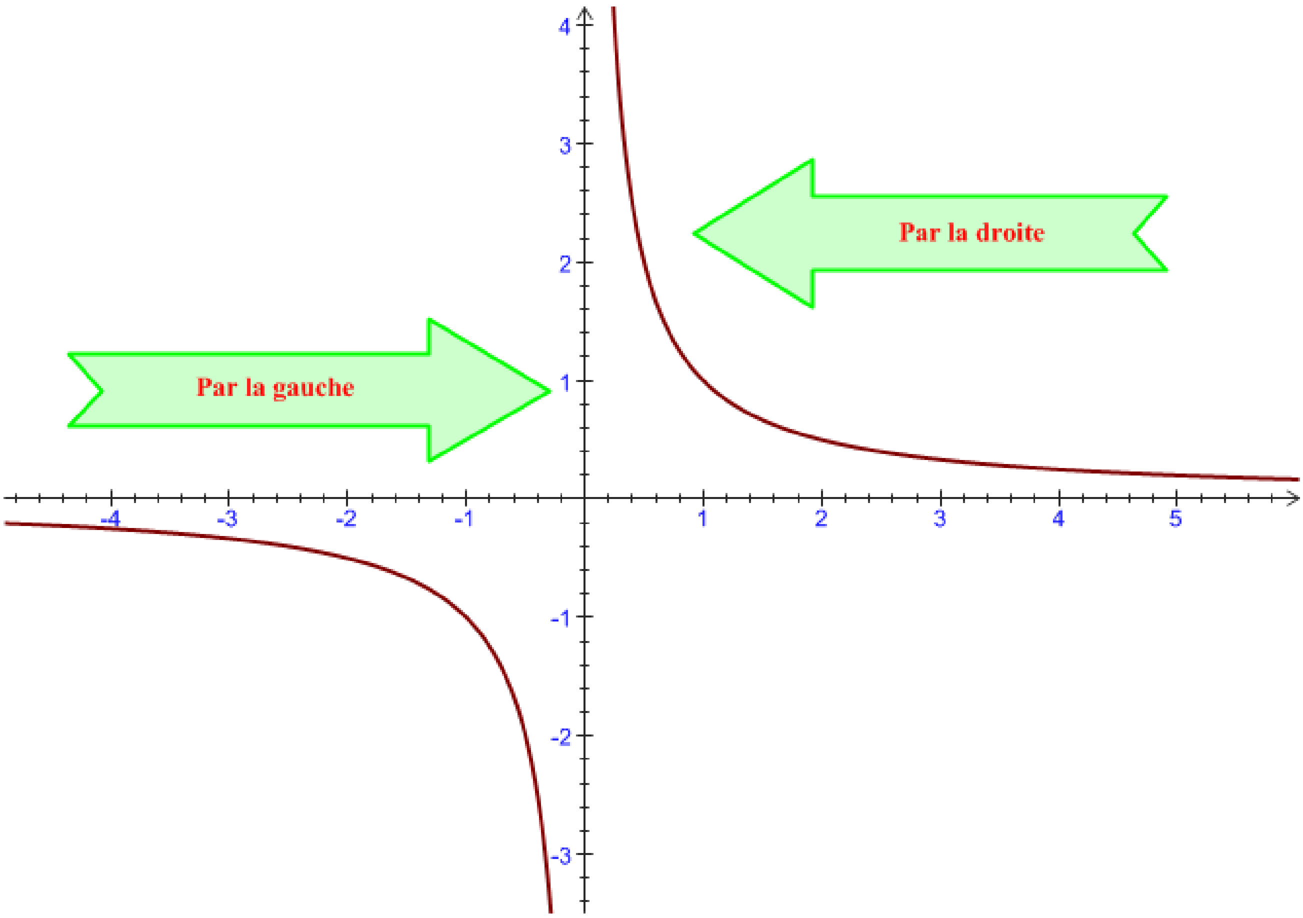
Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf peut être en a.

Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.

Limite à gauche et limite à droite.

Dans ce qui suit, **f** désignera la fonction inverse. Ainsi pour tout x : $f(x) = \frac{1}{x}$

La fonction inverse **f** est définie sur l'intervalle $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.
Autrement écrit, lorsqu'elle tend vers 0, elle peut le faire :



lorsque **x** se rapproche de **0** par la gauche ou par valeurs inférieures, **f(x)** tend vers $-\infty$.
On dit alors que la limite à gauche de **f(x)** en **0** est égale à $-\infty$.
Ce que l'on résume par :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

lorsque **x** se rapproche de **0** par la droite ou par valeurs supérieures, **f(x)** tend vers $+\infty$.
On dit alors que la limite à droite de **f(x)** en **0** est égale à $+\infty$.
Ce que l'on résume par :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

La fonction inverse n'admet pas de limite en 0 car elle a :

une limite à gauche de 0 qui vaut -∞ et une limite à droite de 0 qui vaut +∞.

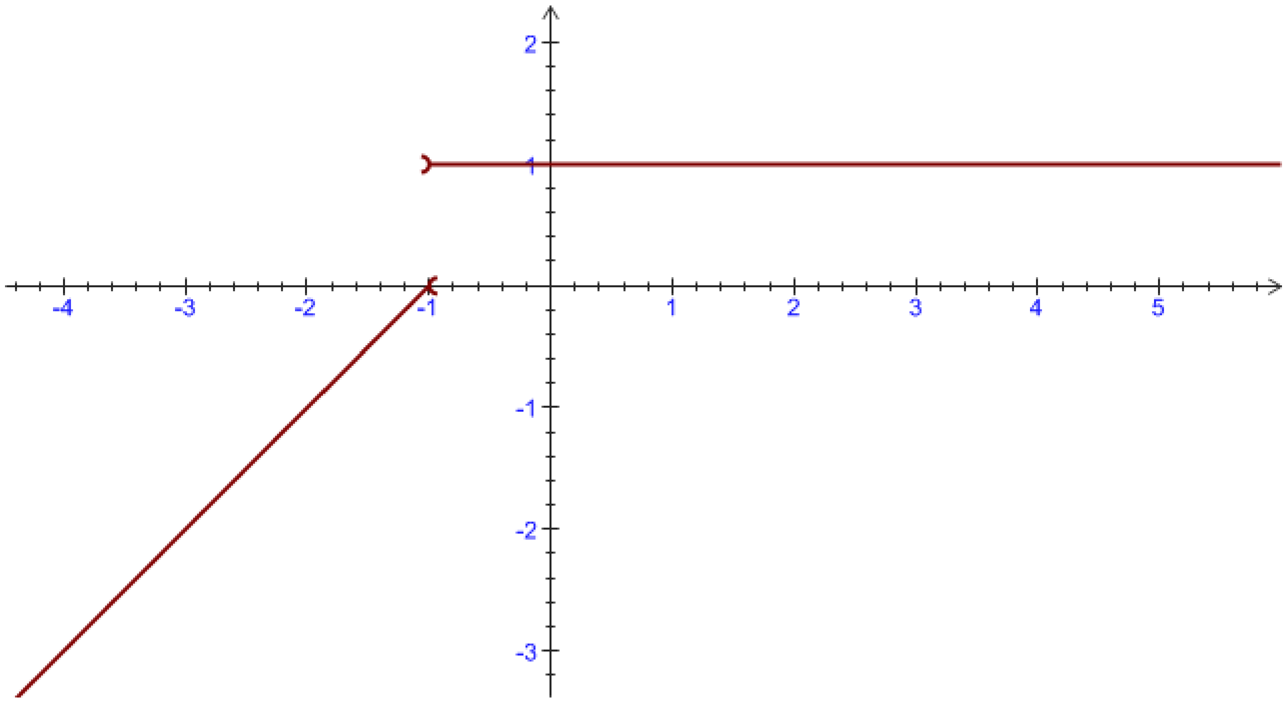
Théorème :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell .$$

Activité 3 page 48

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x < -1 \\ 1 \quad \text{ si } x > -1 \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}.$$

1) Représentation graphique de f :



2) $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} x + 1 = 0$.

3) $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} 1 = 1$

Conclusion : f n'a pas de limite en – 1.

III. CONTINUITE

a. Définition de la continuité

Définition :

Dire qu'une fonction *f*, définie sur un intervalle I contenant a est continue en a signifie que :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

La fonction est continue sur I signifie qu'elle est continue en tout point de I

Exercice page 43 :

1) $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$.

f est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ en particulier en 2.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 9.$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x - 1}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

f est une fonction rationnelle continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ en particulier en -2.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2) = 2.$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$, $D_f = \mathbb{R}$ car $x^2 - 2x + 3 \geq 0$ pour tout réel x

f est continue en 1 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sqrt{2}.$

b. Prolongement par continuité

Soit $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ c'est une forme indéterminée.

Mais $\dfrac{x^3 + 1}{x + 1} = \dfrac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = x^2 - x + 1$, pour tout $x \neq -1$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} x^2 - x + 1 = 3.$

La fonction $g : x \mapsto g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ 3 & \text{si } x = -1 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en – 1.

On dit que f est prolongeable par continuité en – 1.

c. Continuité à droite – continuité à gauche

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de .

la fonction f est continue à droite en a, si et seulement si, $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

la fonction f est continue à gauche en a, si et seulement si, $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

IV. LIMITES DES FONCTIONS DE REFERENCE

Fonction	Ensemble de définition	Limite en -∞	Limite en 0	Limite en +∞
x	$]-\infty\,;+\infty[$	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$]-\infty\,;+\infty[$	$+\infty$	0	$+\infty$
x^3	$]-\infty\,;+\infty[$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$	0	$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$	0
$\sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$		0	$+\infty$

V. OPERATIONS SUR LES LIMITES

a) Limite d'une somme

De manière générale, la limite de la somme de deux fonctions est égale à la somme des limites de celles-ci. Sauf cas particuliers !

Limite de f	Limite de g	Limite de f + g
l	l'	l + l'
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Indéterminé

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + 3x - 1\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 4x^2 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{x} + x - 4\right) = -4$

b) Limite d'un produit.

Limite de f	Limite de g	Limite de f . g
l	l'	$l \times l'$
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	∞	Indéterminé

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + 3\right)\left(\frac{1}{x} - 4\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x} \times (x + 5) =$ F.I.

c) Limite d'un quotient.

Par rapport à multiplication, la division ajoute le fait qu'on ne peut pas diviser par 0.

Limite de f	Limite de g	Limite de f / g
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$-\infty$ ou $+\infty$	0
$+\infty$	$l' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$l' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l' < 0$	$+\infty$
$-\infty$ ou $+\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	Indéterminé

$l > 0$ ou $+\infty$	0^+	$+\infty$
$l > 0$ ou $+\infty$	0^-	$-\infty$
$l < 0$ ou $-\infty$	0^+	$-\infty$
$l < 0$ ou $-\infty$	0^-	$+\infty$
∞	0	∞
0	0	Indéterminé

Exemples :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{3}{x^2} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 5}{\frac{1}{x} - 3} = +\infty$

VI. METHODES DE CALCUL

Les opérations sur les limites ne permettent pas toujours de déterminer la limite d'une fonction. Il faut alors changer de chemin et modifier l'écriture de cette fonction... afin de pouvoir les appliquer !

a) Limite d'un polynôme

Déterminons la limite en + ∞ du polynôme f défini pour tout réel x par : $f(x) = \mathbf{3x^3 - 2x^2 + 1}$

Au premier abord, lorsque x tend vers + ∞ :

$$\begin{cases} 3x^3 \text{ tend vers } +\infty \\ -2x^2 \text{ tend vers } -\infty \\ 1 \text{ tend vers } 1 \end{cases} \quad \text{ainsi} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{F.I.} \quad \text{(Forme Indéterminée)}$$

L'actuelle écriture de **f** ne permet pas de conclure. Modifions la.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - 2x^2 + 1 \\ &= 3x^3\left(1 - \frac{2x^2}{3x^3} + \frac{1}{3x^3}\right) = 3x^3\left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x^3}\right) \end{aligned}$$

On factorise par $3x^3$

Lorsque x tend vers + ∞ :

- $\dfrac{-2}{3x}$ tend vers 0
- $\dfrac{1}{3x^3}$ tend vers 0

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x^3} = 1 - 0 + 0 = 1$$

De plus, lorsque x tend vers + ∞, nous savons que $3x^3$ tend vers + ∞.

Connaissant les limites des deux facteurs, nous pouvons connaître celle de leur produit f(x).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^3\left(1 - \frac{2x^2}{3x^3} + \frac{1}{3x^3}\right)(+\infty) \times 1 = +\infty$$

__Remarque :__
Si on observe attentivement ce qui vient de se passer, on remarque que c'est $\mathbf{3x^3}$ qui a imposé sa limite au produit.
Or $\mathbf{3x^3}$ est le terme dominant du polynôme f(x).

Ce qui est vrai pour le cas particulier f l'est pour n'importe quel polynôme.

b) Limite d'une fraction rationnelle.

On considère la fonction rationnelle **g** définie pour tout réel x par : $g(x) = \dfrac{3x^3 + 2x^2 + 1}{5x^4 - 4x^3 + x}$

Déterminons sa limite en $+\infty$.

Au premier abord, en utilisant ce que nous avons fait avec les polynômes, nous pouvons dire que lorsque x tend vers $+\infty$:

le numérateur **$3x^3 + 2x^2 + 1$** tend vers **$+\infty$**.

le dénominateur **$5x^4 - 4x^3 + x$** tend vers **$+\infty$**.

Ainsi, la limite de g est une forme indéterminée

La présente écriture de **g** ne permet pas de conclure. Il nous faut donc la modifier.

$$g(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{5x^4 - 4x^3 + x} = \frac{3x^3\left(1 + \dfrac{2x^2}{3x^3} + \dfrac{1}{3x^3}\right)}{5x^4\left(1 - \dfrac{4x^3}{5x^4} + \dfrac{x}{5x^4}\right)}$$

On factorise le numérateur puis le dénominateur

$$= \frac{3x^3}{5x^4} \times \frac{1 + \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^3}}{1 - \dfrac{4}{5x} + \dfrac{1}{5x^3}} = \frac{3}{5x} \times \frac{1 + \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^3}}{1 - \dfrac{4}{5x} + \dfrac{1}{5x^3}}$$

Puis on fragmente la fraction et on simplifie

Quand x tend vers $+\infty$ $\begin{cases} 1 + \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^3} \text{ tend vers } 1 \\ 1 - \dfrac{4}{5x} + \dfrac{1}{5x^3} \text{ tend vers } 1 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^3}}{1 - \dfrac{4}{5x} + \dfrac{1}{5x^3}} = 1$

De plus la limite de $\dfrac{3}{5x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, est égale à 0.

Connaissant les limites des deux facteurs, celle de leur produit g(x) est à notre portée :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{5x} \times \frac{1 + \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^3}}{1 - \dfrac{4}{5x} + \dfrac{1}{5x^3}} = 0 \times 1 = 0$$

Remarque :

Si on observe attentivement ce qui vient de se passer, on remarque que c'est $\frac{3}{5x}$ qui a imposé sa limite au produit. Or, $\frac{3}{5x} = \frac{3x^3}{5x^4}$

Autrement dit, c'est le quotient du terme dominant du numérateur et du terme dominant du dénominateur qui a donné sa limite à $g(x)$ en + ∞.