1) COSINUS ET SINUS D'UN REEL

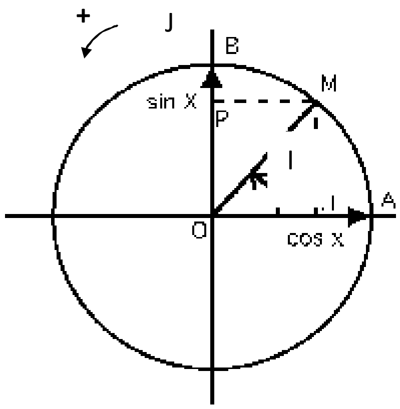
Sauf contre indication, l'unité utilisée est le radian.

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ; on considère le cercle trigonométrique C de centre O .

A) DEFINITION

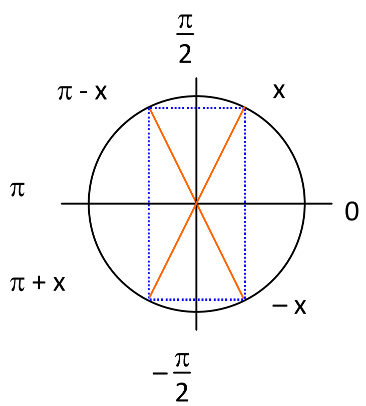
Pour tout réel x , il existe un point M unique du cercle trigonométrique C tel soit une mesure de ($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OM}$) .

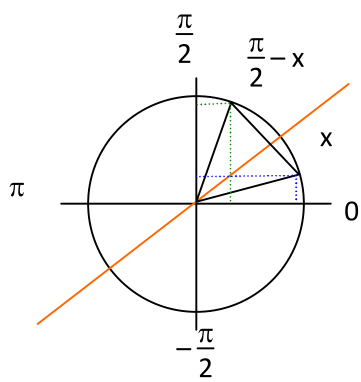
- l'abscisse du point M est le **cosinus** de x (noté cos x)
- l'ordonnée du point M est le **sinus** de x (noté sin x)



Propriétés :
Pour tout réel x et tout entier relatif k,
- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

2) LIGNES TRIGONOMETRIQUES DES ANGLES ASSOCIES





▪ cos (– x) = cos x ▪ cos (π – x) = – cos x ▪ cos (π + x) = – cos x ▪ cos ($\frac{\pi}{2}$ – x) = sin x ▪ cos ($\frac{\pi}{2}$ + x) = – sin x	▪ sin (– x) = – sin x ▪ sin (π – x) = sin x ▪ sin (π + x) = – sin x ▪ sin ($\frac{\pi}{2}$ – x) = cos x ▪ sin ($\frac{\pi}{2}$ + x) = cos x

Activité 9 page 53.

3) TANGENTE D'UN REEL

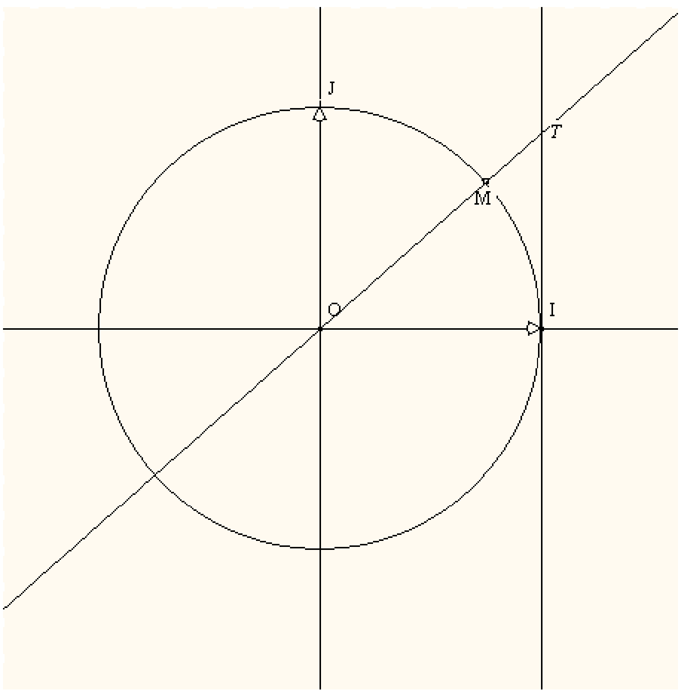
A) DEFINITION

On appelle tangente de $\boldsymbol{\theta}$, le réel noté tan$\boldsymbol{\theta}$ et défini par $\tan\boldsymbol{\theta} = \frac{\sin\boldsymbol{\theta}}{\cos\boldsymbol{\theta}}$, pour tout réel $\boldsymbol{\theta}$ tel que $\boldsymbol{\theta} \neq \frac{\boldsymbol{\pi}}{2} + \boldsymbol{k\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$.

Activité 2 page 54.

1) $\boldsymbol{M}\left(\cos\boldsymbol{\theta}, \sin\boldsymbol{\theta}\right)$ et $\boldsymbol{T}\left(1, \boldsymbol{y}\right) \Rightarrow \text{dét}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}, \overrightarrow{\boldsymbol{OT}}\right) = \begin{vmatrix} \cos\boldsymbol{\theta} & 1 \\ \sin\boldsymbol{\theta} & \boldsymbol{y} \end{vmatrix} = \boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{\theta} - \sin\boldsymbol{\theta}$.

2) $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{OT}}$ sont colinéaires $\Rightarrow$ $\text{dét}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}, \overrightarrow{\boldsymbol{OT}}\right) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{\theta} - \sin\boldsymbol{\theta} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\sin\boldsymbol{\theta}}{\cos\boldsymbol{\theta}} = \tan\boldsymbol{\theta}$



Activité 3 page 54.

Propriétés :

Pour tout réel $\boldsymbol{\theta}$ tel que $\boldsymbol{\theta} \neq \frac{\boldsymbol{\pi}}{2} + \boldsymbol{k\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$, on a :

- $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$.
- $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.

4) COSINUS ET SINUS D'UN ANGLE ORIENTE DE VECTEURS

A) DEFINITION

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan orienté.

Si x est une mesure en radian de l'angle orienté ($\vec{u}$, $\vec{v}$) , alors les autres mesures sont de la forme x + 2 k π (k

Or cos (x + 2 k π) = cos x et sin (x + 2 k π) = sin x . On en déduit la définition suivante :

Le cosinus (resp. le sinus) de l'angle orienté de vecteurs ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est le cosinus (resp. le sinus) de l'une quelco ses mesures.

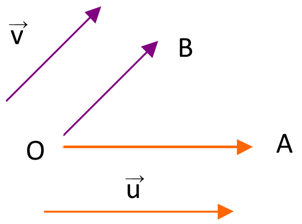
On note **cos ($\vec{u}$, $\vec{v}$)** et **sin ($\vec{u}$, $\vec{v}$)** .

B) LIEN ENTRE cos ($\vec{u}$, $\vec{v}$) et cos ($\widehat{AOB}$) lorsque $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$

Notons α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et notons x la mesure principale de

($\vec{u}$, $\vec{v}$) .

On a α = | x | . Deux cas se présentent :



- Si x ≥ 0 , | x | = x et par suite cos α = cos x .
- Si x ≤ 0 , | x | = – x , et cos α = cos (– x) = cos x

On a donc cos ($\vec{u}$, $\vec{v}$) = cos ($\widehat{AOB}$)

Remarque:

Ce n'est pas vrai pour le sinus : sin ($\widehat{AOB}$) = | sin ($\vec{u}$, $\vec{v}$) |

Activités 1 page 57 et 3 page 58.

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, de composantes (x, y) et (x', y') dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$.

Alors : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}}$

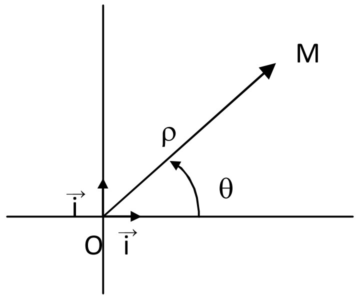
5) REPERAGE ET COORDONNEES POLAIRES

A) COORDONNEES POLAIRES D'UN POINT

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit M un point du plan (distinct de O) .

On appele **cooordonnées polaires** de M , tout couple de nombres réels (ρ , θ) tel que :

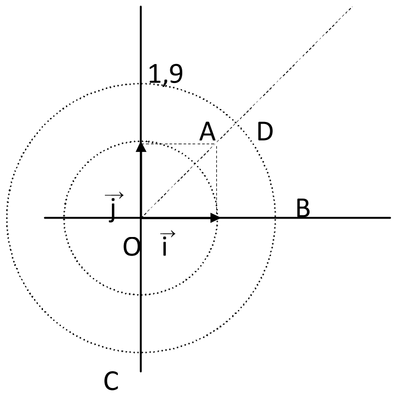
$$\rho = OM \qquad \text{et} \qquad (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$$



Remarque :

- O est appelé le pôle et [Ox) l'axe polaire.
- On dit que r est le rayon polaire du point M et θ l'un de ses angles polaires.
- Un repère polaire étant choisi, à tout couple de coordonnées polaires correspond un unique point du plan.

Ex :

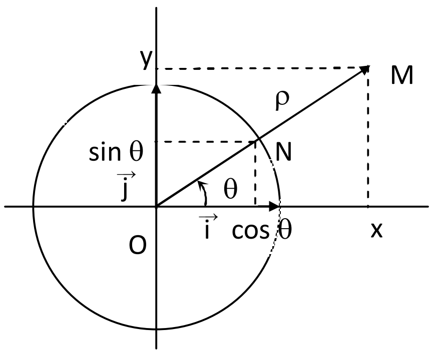


- Un couple de coordonnées polaires de A est :…………………..
- Un couple de coordonnées polaires de B est : ………………….
- Un couple de coordonnées polaires de C est :…………………..
- Un couple de coordonnées polaires de D est :……………………

B) REPERE POLAIRE ET REPERE CARTESIEN

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Un point M (distinct de O) a pour coordonnées cartésiennes (x ; y) et pour coordonnées polaires (ρ , θ) . On a :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad x = \rho\cos\theta \quad \text{et} \quad y = \rho\sin\theta$$



Preuve :

Soit C le cercle trigonométrique de centre O .
La demi-droite [OM) coupe C en N .
N a pour coordonnées (cos θ ; sin θ).
Or $\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{ON}$; on en déduit que $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées ($\rho\cos\theta$; $\rho\sin\theta$).
D'autre part : $OM^2 = x^2 + y^2 = \rho^2$

6) FORMULES DE TRANSFORMATION

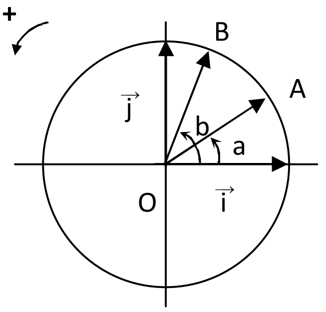
A) FORMULES D'ADDITION

Pour tout réel a et b :

cos (a – b) = cos a cos b + sin a sin b ; cos (a + b) = cos a cos b – sin a sin b

sin (a – b) = sin a cos b – sin b cos a ; sin (a + b) = sin a cos b + sin b cos a

Preuve :



- Montrons que **cos (a – b) = cos a cos b + sin a sin b**

On considère le cercle trigonométrique C de centre O muni du repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On note A et B les points de C , définis par $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b$.

Les coordonnées de A et de B sont respectivement (cos a ; sin a) et (cos b ; sin b) .

D'autre part, d'après la relation de Chasles, on a :
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = -(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b - a$

Calculons alors de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$:

- *avec les coordonnées* : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- *en utilisant* $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \cos(b - a)$

Ainsi cos (a – b) = cos a cos b + sin a sin b

- Montrons que **cos (a + b) = cos a cos b – sin a sin b**

Il suffit d'écrire cos (a + b) = cos (a – (– b)) …

- Montrons que **sin (a + b) = sin a cos b + sin b cos a**

Il suffit d'écrire $\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) = \dots$

- Montrons que **sin (a – b) = sin a cos b – sin b cos a**

Il suffit d'écrire sin (a – b) = sin (a + (– b)) = …

Ex :

En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, on peut calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

- $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \ldots = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \ldots = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

B) FORMULES DE DUPLICATION ET DE LINEARISATION

FORMULES DE DUPLICATION	*FORMULES DE LINEARISATION*
▪ $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ ▪ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ $= 2\cos^2 a - 1$ $= 1 - 2\sin^2 a$	▪ $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ ▪ $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

Preuve :

En prenant b = a , dans les formules précédentes on obtient $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ et $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

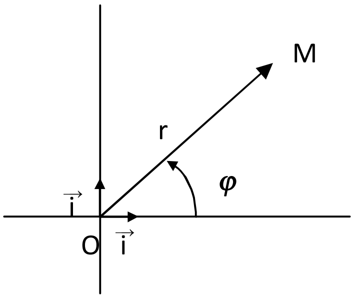
En utilisant la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$.

On en déduit les deux dernières formules.

Activité 2 page 59.

C) FORMULE DE TRANSFORMATION DE $a\cos x + b\sin x$

Activité



Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

M est un point du plan ayant pour coordonnées cartésiennes (a,b)

dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) et pour coordonnées polaires $[r,\varphi]$.

On sait que $\cos\varphi = \frac{a}{r}$; $\sin\varphi = \frac{b}{r}$; $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

Pour tout réel x, $a\cos x + b\sin x = r\cos\varphi\cos x + r\sin\varphi\sin x = r(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x) = r\cos(x-\varphi)$.

Ainsi on a : Soit $(a,b)\neq(0,0)$. Pour tout réel x,

$$a\cos x+b\sin x=r\cos(x-\varphi);\ \textbf{où}\ r=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \textbf{et}\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Activité 4 page 60.

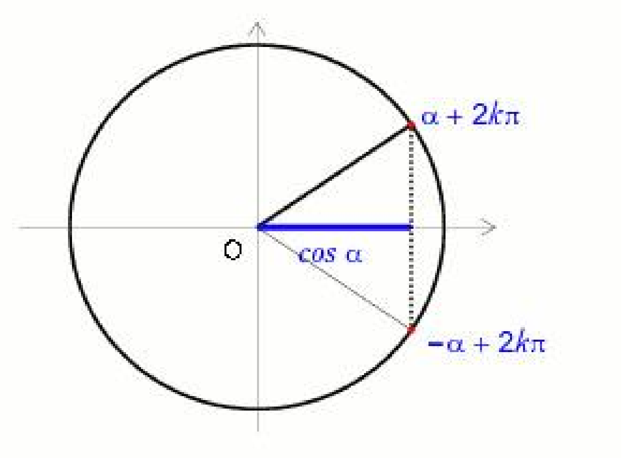
7) EQUATIONS ET INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

A) EQUATION EN COSINUS

L'équation $\cos x=\cos\alpha$; où α est un réel fixé a pour solutions $\alpha+2k\pi$ et $-\alpha+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

L'équation $\cos x=0$ a pour ensemble de solutions $\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Cet ensemble peut s'écrire aussi sous la forme $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

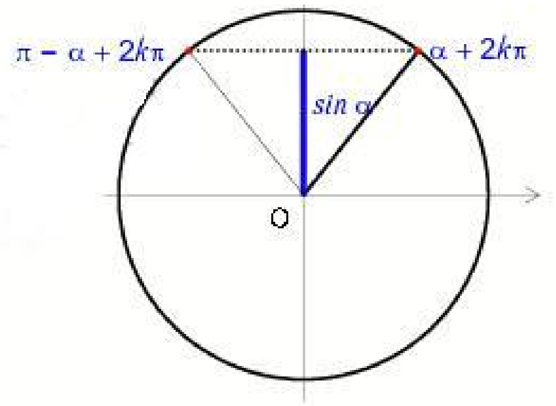


B) EQUATION EN SINUS

L'équation $\sin x=\sin\alpha$; où α est un réel fixé a pour solutions $\alpha+2k\pi$ et $\pi-\alpha+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

L'équation $\sin x=0$ a pour ensemble de solutions $\{0+2k\pi\ ;\ \pi+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

Cet ensemble peut s'écrire aussi sous la forme $\{k\pi\ \ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$.



Exemple

Pour résoudre l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ on pourra écrire :

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ est donc $\left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$.

A) EQUATION EN TANGENTE

L'équation $\tan x = \tan\alpha$; où α est un réel fixé différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ a pour solutions $\alpha + 2k\pi$ et $\pi + \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Cet ensemble peut s'écrire aussi sous la forme $\{\alpha + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercices 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 page 67.