I / Langage ensembliste-Langage probabiliste :

Définitions : * *Lorsqu'on fait une expérience aléatoire, le résultat est appelé* issue .
* *L'ensemble des issues possibles est appelé* univers des possibles.
* *Un évènement est une partie de l'univers des possibles.*

Soit Ω *l'univers des possibles d'une expérience, on a :* $P(\Omega)$ *est l'ensemble des parties ou évènements de* Ω .

Langage ensembliste	***Langage probabiliste***
A : *une partie de* Ω	A *est un évènement*
$A = \Omega$	A *est l'évènement certain*
$A = \varnothing$	A *est l'évènement impossible*
e : *un élément de* Ω , $e \in \Omega$	e *est une éventualité ou un cas possible*
$\{e\}$ *est un singleton ,* $\{e\} \subset \Omega$	$\{e\}$ *est un évènement élémentaire*
$A \cup B$ *est la réunion de* A *et* B	$A \cup B$ *est l'évènement « A ou B »*
$A \cap B$ *est l'intersection de* A *et* B	$A \cap B$ *est l'évènement « A et B »*
$\overline{A} = C_{\Omega}^{A}$ *est le complémentaire de* A *dans* Ω	$\overline{A}$ *est l'évènement contraire de* A
Si $A \cap B = \varnothing$, A *et* B *sont deux parties disjoints de* Ω	A *et* B *sont deux évènements incompatibles*

II / Probabilité d'un évènement :

Définition : *Soit* Ω *un ensemble fini, on appelle probabilité définie sur* $P(\Omega)$ *toute application* $p : P(\Omega) \rightarrow [0,1]$ *tel que :*

* $p(\Omega) = 1$
* *Pour tout* A *et* B *de* $P(\Omega)$, *si* $A \cap B = \varnothing$ *alors* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
* *On dit que* p *est une* **équiprobabilité** *sur* $P(\Omega)$ *ou* **probabilité uniforme** *si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité .*
* *Soit* Ω *un ensemble fini* p l'équiprobabilité *sur* $P(\Omega)$ *pour tout évènement* A *de* $P(\Omega)$, *la probabilité de* A *est :*

$$\boxed{p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}}}.$$

Notation : *Le cardinal d'un ensemble* A *noté* $card(A)$ *est le nombre d'éléments de* A .

III / Propriétés :

Soit Ω *un ensemble fini,* p l'équiprobabilité *sur* $P(\Omega)$:

❶ *Pour tout évènement* A *de* $P(\Omega)$ *on a :* $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

❷ $p(\varnothing) = 0$.

❸ *Pour tout* A *et* B *de* $P(\Omega)$ *on a :*
- ➢ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- ➢ $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$.
- ➢ *Si* $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$.

Exercice N°01 :

Une urne contient 4 boules rouges, 5 boules vertes et 3 boules blanches indiscernable au toucher.

1/ On tire simultanément 2 boules de l'urne, calculer la probabilité des évènements suivants :

a) A : « avoir 2 boules blanches » .

b) B : « avoir deux couleurs » .

c) C : « avoir au moins une boule verte » .

2/ On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne, calculer la probabilité des évènements suivants :

a) D : « avoir deux boules de même couleur » .

b) E : « avoir une seule boule verte » .

3/ On inscrit le numéro (1) sur les boules rouges, (-1) sur les boules vertes et (0) sur les boules blanches . On tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne ; On pose S : « la somme des numéros inscrits sur les boules tirées ».

a) Donner les valeurs possibles de S .

b) Calculer la probabilité de chaque valeur de S .

c) Vérifier que la somme de toutes ces probabilités est égale à 1 .

Exercice N°02 :

Une urne contient 10 boules indiscernables au touchées : six noire numérotées $1,1,2,2,2,3$ et quatre blanches numérotées $1,1,2,3$

1/ On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne . Calculer la probabilité des évènements suivants :

a) A : « obtenir trois boules noires » .

b) B : « la somme des trois numéros inscrits sur les boules tirées est paire » .

c) C : « obtenir trois boules noires ou une somme paire » .

2/ On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne .Calculer la probabilité des évènements suivants :

a) D : « avoir exactement deux boules noires et une boule blanche » .

b) F : « avoir au moins une boule noire » .

c) E : « la boule n°2 est tirée pour la première fois au deuxième tirage ».

Exercice N°03 :

Une urne contient quatre boules blanches numérotées : $-1,0,0,1$ et cinq boules noires numérotées : $-1,1,1,2,2$.

1/ On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne . Calculer la probabilité des évènements suivants :

a) A : « obtenir trois boules de deux couleurs » .

b) B : « obtenir trois boules dont le produit des numéros est nul ».

c) C : « obtenir trois boules dont le produit est une puissance de 2 ».

d) D : « $A \cup B$» .

e) E : « il reste dans l'urne le même nombre de boules blanches que de boules noires »

2/ On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne . Calculer la probabilité des évènements suivants :

a) F : « obtenir exactement deux boules blanches » .

b) G : « obtenir une somme nulle » .

3/ On répartit les neuf boules dans neuf cases ,chaque case pouvant contenir de zéro jusqu'à neuf boules .

a) Calculer le nombre de répartition possible .

b) Calculer la probabilité des évènements suivants :

- H : « deux cases et deux seulement sont non vide » .
- K : « aucune case n'est vide ».
- L : « chaque couleur est dans une case ».

Exercice N°04 :

On considère une urne dans laquelle se trouve : 1 *boule portant le numéro* 1 , 2 *boules portant le numéro* 2 , 3 *boules portant le numéro* 3 *et* n *boules portant le numéro* n .

1/ Combien l'urne contient elle de boule ?

2/ On tire au hasard une boule de l'urne , tous les tirages sont supposés équiprobables.

a) On suppose que n *est pair .Exprimer en fonction de* n *la probabilité pour que la boule tirée porte :*

- *Un numéro pair .*
- *Un numéro impair .*

b) Dans cette question , on suppose seulement que le nombre totale de boules dans l'urne est 21 *. Quelle est la probabilité pour que la boule tirée porte un numéro strictement supérieur à* 4 *?*

Exercice N°05 :

Une urne contient 6 *boules :* 3 *numérotées* 1 , 2 *numérotées* 2 *et une numérotées* 3 . *On tire une première boule au hasard puis sans remettre cette boule on tire une seconde boule au hasard . Le résultat d'un tel tirage est le couple* (a,b) *où* a *et* b *sont les nombres inscrits sur la première et la seconde boule .*

1/ Calculer la probabilité de chaque résultat possible .

2/ Calculer la probabilité des évènements suivants :

- A : « *les deux numéros tirés sont égaux* $(a=b)$ ».
- B : « *le premier nombre tiré est strictement supérieur au second* $(a>b)$ » .
- C : « *le premier nombre tiré est inférieur au second* $(a\leq b)$ » .

3/ On note X *la valeur absolue de la différence de deux nombres tirés* $(X=|a-b|)$.

a) Quel est l'ensemble E *des valeurs possibles de* X .

b) Pour tout élément i *de* E *, calculer la probabilité de l'évènement* $(X=i)$.

Exercice N°06 :

Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ *un espace probabilisé finie.*

1/ Montrer que si A , B *et* C *sont trois évènements quelconques de* $P(\Omega)$ *, on a :*

$$p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)-p(A\cap C)-p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)$$

2/ a) Soient $A_{1\leq i\leq n}$ n *évènements quelconques de* $P(\Omega)$. *Montrer l'inégalité suivante :*

$$p(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n)\leq\sum_{i=1}^{n}p(A_i) \quad ❶$$

b) Dans quel cas l'inégalité ❶ *devient-elle une égalité ?*