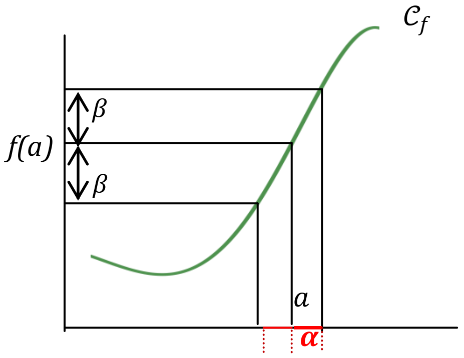
Institut : El Ahd El Jadid kabaria	Chapitre : Continuité	Prof : Ayadi Mondher 3 ème sciences exp+3 ème Maths

I. Continuité en un réel :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.



on dit que f est continue en a si :

pour tout nombre $\beta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x - a| < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$

Exemple :

Soit la fonction f une fonction définie sur IR par $f(x) = 2x + 3$, montrer que f est continue en $a = 1$

Solution :

La fonction f est continue en 1 si et seulement

si pour tout $\beta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x - 1| < \alpha$ alors $|f(x) - f(1)| < \beta$

β est un réel donné, cherchons s'il existe un réel α tel que $|f(x) - f(1)| < \beta$

Soit $|f(x) - f(1)| < \beta$ équivaut à $|2x + 3 - 5| < \beta$ équivaut à $|2x - 2| < \beta$ équivaut à $2|x - 1| < \beta$

équivaut à $|x - 1| < \frac{\beta}{2}$

On choisit alors $\alpha = \frac{\beta}{2}$ (α existe) ainsi f est continue pour a=1

Vocabulaire : *Une fonction est non continue en a est dite discontinue en a.*

Conséquences : *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I*

- *Si on trace la courbe représentative de f sans lever le crayon en un point d'abscisse a, alors f est continue en tout réel a de I.*
- *Si la courbe possede un saut en un point d'abscisse a alors on dit que f est discontinue en a.*

II. Continuité de certaines fonctions usuelles :

Théoreme :

- *La fonction $x \longrightarrow ax + b$ est continue en tout réel a de IR.*
- *La fonction $x \longrightarrow x^2$ est continue en tout réel a de IR.*
- *La fonction $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ est continue en tout réel a de IR*.*
- *La fonction $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est continue en tout réel a de IR_+.*
- *Tout fonction polynôme est continue en tout réel a de IR.*
- *Toute fonction rationnelle est continue en tout réel a où elle est définie.*

Exercice :

Justifier la continuité de f en a dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = -3x^3 + x^2 - 4x + 5$; $a = 1$

....

....

2) $f : x \longrightarrow \frac{3x+5}{-2x+4}$; $a = \sqrt{2}$

....

....

III. Continuité de la fonction $|f|$:

Activité :

1) Montrer que pour tout réel c et d, on a : $\big||c|-|d|\big| \leq |c-d|$.
2) Soit f la fonction définie en a , alors $|f|$ est continue en a.

Solution :

1)

$1^{ère}$ méthode :

On remarque que pour tout réels c et d on a :

$c.d \leq |c|.|d|$ équivaut à $2c.d \leq 2|c|.|d|$ équivaut à $-2|c|.|d| \leq -2c.d$

équivaut à $c^2 - 2|c|.|d| + d^2 \leq c^2 - 2c.d + d^2$ équivaut à $|c|^2 - 2|c|.|d| + |d|^2 \leq c^2 - 2c.d + d^2$

équivaut à $(|c|-|d|)^2 \leq (c-d)^2$ équivaut à $\sqrt{(|c|-|d|)^2} \leq \sqrt{(c-d)^2}$

équivaut à $\big||c|-|d|\big| \leq |c-d|$

$2^{ème}$ méthode :

Pour tout réels c et d on a $|c| = |c-d+d| \leq |c-d| + |d|$ équivaut à $|c|-|d| \leq |c-d|$ -(1)-

de même $|d| = |d-c+c| \leq |d-c| + |c|$ équivaut à $|d|-|c| \leq |d-c| = |c-d|$

équivaut à $-(|d|-|c|) \geq -|c-d|$ équivaut à $|c|-|d| \geq -|c-d|$

équivaut à $-|c-d| \leq |c|-|d|$ -(2)-

d'après (1) et -(2)- on a $-|c-d| \leq |c|-|d| \leq |c-d|$ équivaut à $\big||c|-|d|\big| \leq |c-d|$

2) f est continue en a équivaut à

pour tout $\beta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x-a| < \alpha$ alors $|f(x)-f(a)| < \beta$

d'après 1) on a $\big||f(x)|-|f(a)|\big| \leq |f(x)-f(a)| < \beta$

alors $\big||f(x)|-|f(a)|\big| < \beta$

donc pour tout $\beta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x-a| < \alpha$ alors $\big||f(x)|-|f(a)|\big| < \beta$

alors $|f|$ est continue en a

Théoreme :

> f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$,
> Si f est continue en a alors $|f|$ est continue en a

Exercice :

Justifier la continuité de la fonction f en a

1. $f : x \longmapsto |x^2-4|$; $a = -2$

 ....

 ....

 ....

2. $f : x \longmapsto \frac{x^2+1}{|x^2-4|}$; $a = 3$

 ....

 ....

 ....

 ....

IV. Opérations algébriques sur les fonctions continues :

Théorème :

> Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $a \in I$ et $k \in IR$
> - Si f et g sont continues en a alors $f+g$, $f.g$ et $k.f$ sont continues en a
> - Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en a
> - Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a

Exercice :

Justifier la continuité de la fonction f en a

1. $f : x \longmapsto x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}$; $a = 3$

………

………

………

………

2. $f : x \longrightarrow \frac{|x|}{x^2+1}$; $a = -2$

………

………

………

………

V. Continuité de la fonction $\sqrt{f}$:

Activité 2 page 26 :

f est une fonction positive sur un intervalle ouvert I .

soit a un réel de I tel que f soit continue en a .

1) On suppose que $f(a) > 0$

a) Pour tout $x \in I$ on a :

………

………

b) On a :

………

………

………

c) f est continue en a si et seulement si

pour tout $\beta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x-a| < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$

………

………

………

………

………

2) On suppose que $f(a) = 0$

f est continue en a si et seulement si

………

………

………

………

Théoreme :

> Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
> Si f est continue en a alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

Exercice :

Etudier la continuité de f en a :

1. $f : x \longrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$; $a = 3$

………

………

………

2. $f : x \longrightarrow \sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x+1}}$; $a = 2$

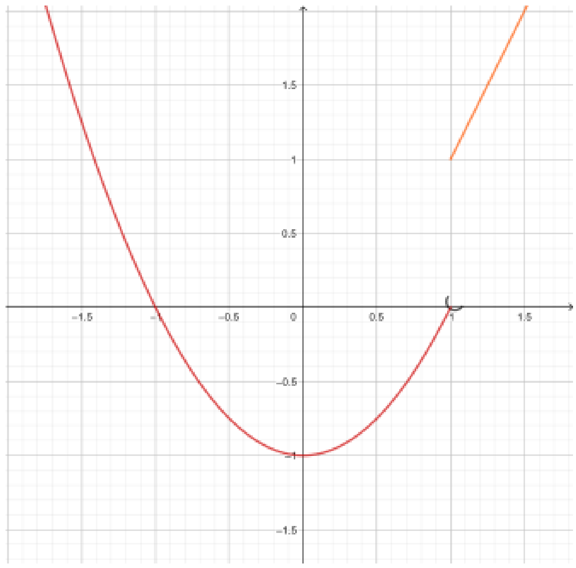
………

………

………

VI. Continuité à droite. Continuité à gauche :

Activité :



Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \ \ x < 1 \\ 2x - 1 & si \ \ x \geq 1 \end{cases}$

1) Déterminer graphiquement l'image de 1 par f

………………………………………………………………………

2) Donner graphiquement une condition suffisante sur les réels x supérieurs à 1, pour que $|f(x) - f(1)| \leq 0.001$

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

3) Que peut_on conjecture sur $|f(x) - f(1)|$ lorsque x se rapproche de 1 en restant inferieur à 1

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

4) Calculer $f(0.9)$, $f(1.1)$, $f(1)$

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

Remarque :

Soit $M(a, f(a))$ un point de la courbe de f. **On constate que :**
Si a se rapproche de 1 et $a < 1$ alors $f(a)$ n'est pas proche de $f(1)$ alors n'est pas ……………………………….
Si a se rapproche de 1 et $a > 1$ alors $f(a)$ est proche de $f(1)$ alors f est ………………………………………….

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I

- On dit que f est continue à droite en a si :
pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $0 < x - a < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$
- On dit que f est continue à gauche en a si :
pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $0 < a - x < \alpha$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \beta$

Théoreme :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
f est continue en a, si f est continue à droite et à gauche en a

Exemple :

Soit la fonction $f : x \longrightarrow \sqrt{x+1}$. Etudier la continuité à droite de f en -1

Correction :

La fonction f est continue à droite en -1 si et seulement si
pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$ et $0 < x - (-1) < \alpha$ alors $|f(x) - f(-1)| < \beta$
β est un réel donné, cherchons s'il existe un réel α tel que $|f(x) - f(-1)| < \beta$
Equivaut à $\left|\sqrt{x+1} - 0\right| < \beta$ équivaut à $\left|\sqrt{x+1}\right| < \beta$
équivaut à $\sqrt{x+1} < \beta$ équivaut à $x + 1 < \beta^2$ équivaut à $x < \beta^2 - 1$
on choisit $\alpha = \beta^2 - 1$ (α existe) ainsi f est continue à droite en -1

Théorème :

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- Si f est continue à droite en a alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue à droite en a .
- Si f est continue à gauche en a alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue à gauche en a .

VII. Continuité sur un intervalle :

Définition :

Soit a et b finis ou infinis :

- Soit f une fonction définie sur $]a,b[$, on dit que f est continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout $x \in]a,b[$
- Soit f une fonction définie sur $]a,b]$, on dit que f est continue sur $]a,b]$ si elle est continue en tout $x \in]a,b[$ et continue à gauche en b
- Soit f une fonction définie sur $[a,b[$, on dit que f est continue sur $[a,b[$ si elle est continue en tout $x \in]a,b[$ et continue à droite en a
- Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, on dit que f est continue sur $[a,b]$ si elle est continue en tout $x \in]a,b[$ continue à droite en a et continue à gauche en b

Conséquence 1 :

- Si une fonction est continue sur un intervalle I, alors elle est continue en tout intervalle inclus dans I.

Conséquence 2 :

- Toute fonction polynôme est continue sur tout intervalle continu dans IR.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle continu dans son ensemble de définition.

Activité 2 page 29 :

Justifier les affirmations suivantes.

1. La fonction $f : x \longrightarrow |x| + 1$ est continue sur IR

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………

2. La fonction $f : x \longrightarrow \sqrt{x+1}$ est continue sur $[0,1]$

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………

3. La fonction $f : x \longrightarrow -3x + 5$ est continue sur l'intervalle $]-0.01\ ,\ 10]$

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………

4. La fonction $f : x \longrightarrow \frac{2x+3}{x-1}$ est continue sur l'intervalle $[-1,0]$

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………

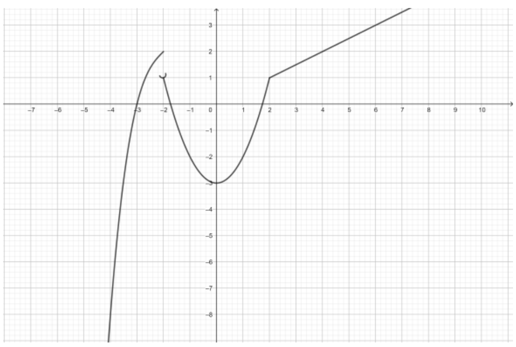
   ……………………………………………………………………………………………………

VIII. Image d'un intervalle par une fonction continue :

Activité :

soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & si \quad x \geq 2 \\ x^2 - 3 & si \ -2 < x < 2 \\ (x+2)^3 + x + 4 & si \quad x \leq -2 \end{cases}$

et soit $\mathcal{C}_f$ sa représentation sur un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$



1. Montrer graphiquement que f n'est pas continue en -2

   ……………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………

2. Déterminer $f([2,6])$, $f(]-2\ ,2[)$ et $f(]-\infty, -2])$

   ……………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………

3. *Déterminer le nombre de solution de l'équation f(x)=a, avec a un réel*

……

……

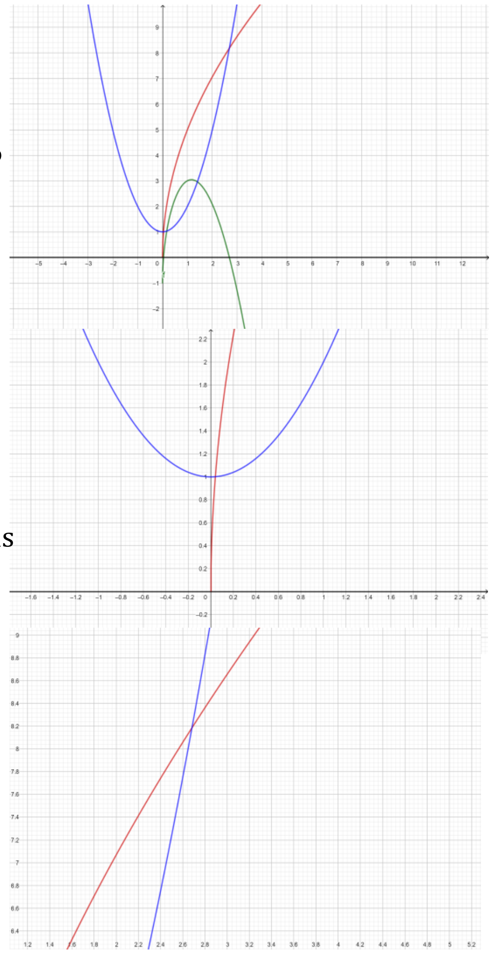
……

Théorème : (admis)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

IX. *Résolution d'équations de la forme $f(x) = k$:*

Activité 3 page 31



1. *a) figure*

   b) $(E): \frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{x} - x^2 - 1 = 0$; $x_1 \approx 0.01$, $x_2 \approx 2.6$

   c) $0 < x_1 < 0.1$ *et* $2.6 < x_2 < 2.7$

2. *soit* $h : x \longrightarrow \frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{x} - x^2 - 1$

   a) Calculer h(0) et h(1)

   ……………………………………………………………………

   b) Justifier que 0 appartient à l'intervalle $h([0\ ,1])$

   ……………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………

   c) En déduire que l'équation (E) possède au moins une solution dans l'intervalle [0 , 1]

   ……………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………

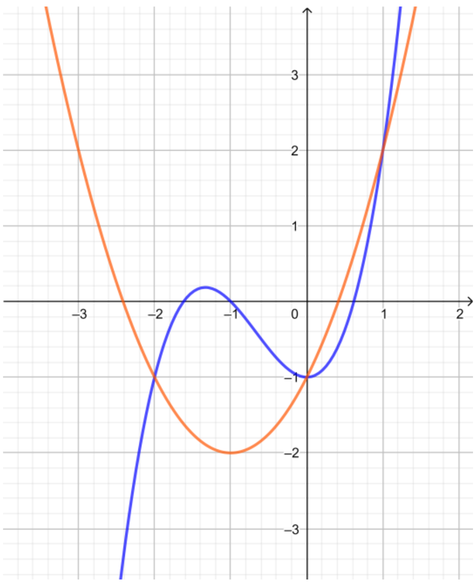
   ……………………………………………………………………

Définition :

Soient *f* une fonction définie sur un ensemble *D* et *k* un réel fixé. Résoudre l'équation *f*(*x*)=*k* :
• consiste à déterminer tous les réels *x* de *D* qui ont pour image *k*
• revient donc à déterminer l'ensemble des antécédents de *k* par *f*.

propriété :

Graphiquement, les solutions de f(x)=k sont les abscisses de tous les points de C_f ayant pour ordonnée k



C_f *et* C_g *sont respectivement les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal.*

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D. Résoudre l'équation f(x)=g(x) consiste à déterminer tous les réels x de D qui ont la même image par f et par g.

Propriété

Graphiquement, les solutions de f(x)=g(x) sont les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et de g.