| Prof : Boufares Amor | Cours de géométrie dans l’espace | $3^{ème}$ Maths et $3^{ème}$ sciences exp. |
|---|---|---|

# I) Définition d’un vecteur de l’espace

**Définition**

Soit A et B deux points distincts de l’espace. On appelle vecteur de représentant (A, B) l’être mathématique noté $\overrightarrow{AB}$ et défini par :
- ☻ Sa direction qui est celle de la droite (AB)
- ☻ Son sens qui est de A vers B
- ☻ Sa longueur qui est la longueur du segment [AB]

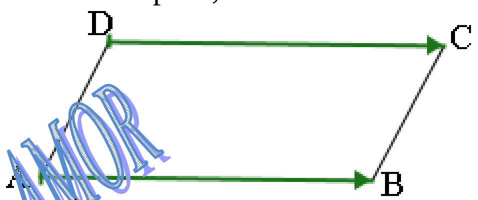
Si A = B alors $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur nul qui sera noté $\vec{0}$.

► L’ensemble des vecteurs de l’espace est noté W.

**Conséquences**

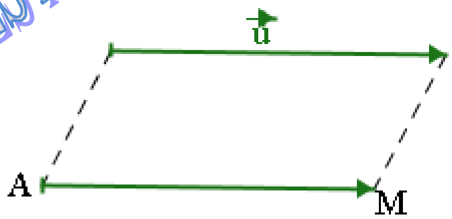
► $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$

► Pour tous points distincts A, B, C et D de l’espace, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme.



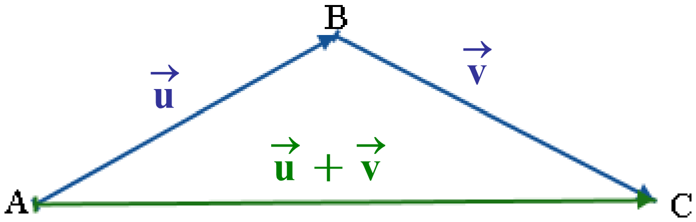



► Pour tout point A et pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$




# II) Addition des vecteurs de l’espace

► Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ deux vecteurs de l’espace. On appelle somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\overrightarrow{AC}$ noté $\vec{u} + \vec{v}$




La relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ,valable pour tous points A, B et C de l’espace, est appelée la relation de Chasles.

► Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{W}$ de l’espace on a :
- ☻ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativité de l’addition)
- ☻ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ est neutre pour l’addition)
- ☻ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativité de l’addition)

► Pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un unique vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ .Le vecteur $\vec{v}$ est appelé l'opposé de $\vec{u}$ et se note - $\vec{u}$.

► Pour tous points A et B de l’espace on a $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

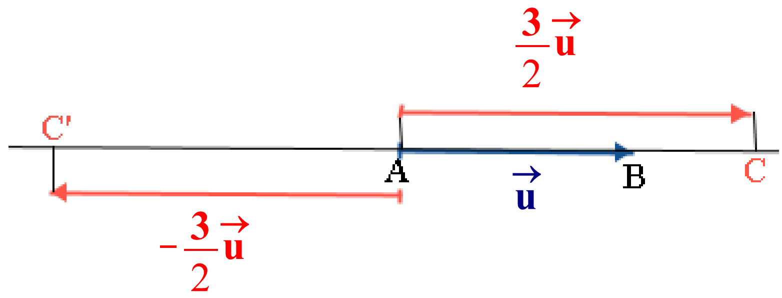
# III) Multiplication d’un vecteur par un réel

**Définition**

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\alpha$ un réel. On appelle produit de $\vec{u}$ par $\alpha$ le vecteur noté $\alpha\vec{u}$ et défini par :

☻ Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\alpha\vec{u} = \vec{0}$

☻ Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $\alpha\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ où $C \in (AB)$ tel que $\overline{AC} = \alpha\overline{AB}$




**Propriétés**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace et pour tous réels $\alpha$ et $\beta$ on a :

► $\alpha\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

► $1.\vec{u} = \vec{u}$

► $(-1).\vec{u} = -\vec{u}$

► $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$ (pseudo associativité)

► $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

► $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

## IV) Colinéarité de deux vecteurs

**Définition**

Deux vecteurs de l'espace sont colinéaires si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel.

**Conséquences**

► Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ que l'on note D(A, $\vec{u}$).

► Le couple (A, $\vec{u}$) est appelé repère cartésien de la droite D(A, $\vec{u}$).

► Deux droites D(A, $\vec{u}$) et D'(B, $\vec{v}$) sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



## V) Combinaison linéaire des vecteurs

**Définition 1**

Un vecteur $\vec{w}$ de l'espace est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace si et seulement s'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

**Définition 2**

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont linéairement dépendants si et seulement si l'un est une combinaison linéaire de deux autres.

On dit aussi que ces vecteurs sont coplanaires ou encore la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

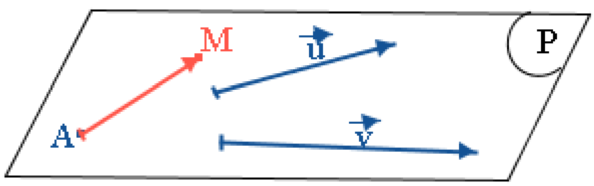
Trois vecteurs non linéairement dépendants sont dits vecteurs linéairement indépendants.

Une famille non liée est dite famille libre.

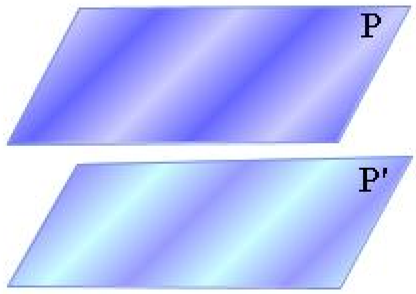
**Conséquences**

► Quatre points A, B, C et D sont dits coplanaires c à d appartiennent à un même plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont linéairement dépendants.

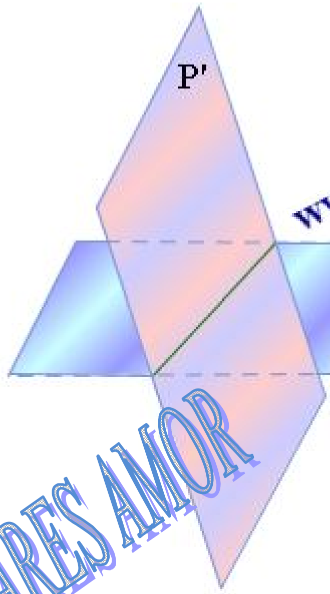
► Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deus vecteurs non colinéaires de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}, \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants est le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ que l'on note P(A, $\vec{u}$, $\vec{v}$).



► Deux plans $P(A,\vec{u},\vec{v})$ et $P'(B,\vec{u'},\vec{v'})$ sont parallèles si et seulement si les familles $\{\vec{u},\vec{u'},\vec{v'}\}$ et $\{\vec{v},\vec{u'},\vec{v'}\}$ sont liées.

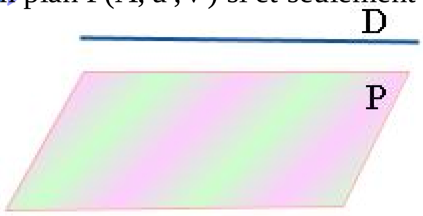



► Deux plans $P(A,\vec{u},\vec{v})$ et $P'(B,\vec{u'},\vec{v'})$ sont sécants si et seulement si l'une des familles $\{\vec{u},\vec{u'},\vec{v'}\}$ et $\{\vec{v},\vec{u'},\vec{v'}\}$ est libre.

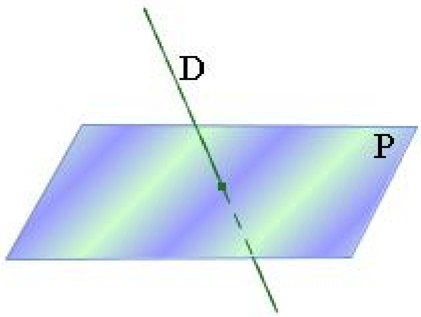





► Une droite $D(B,\vec{w})$ est parallèle à un plan $P(A,\vec{u},\vec{v})$ si et seulement si la famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ est liée.




► Une droite $D(B,\vec{w})$ et un plan $P(A,\vec{u},\vec{v})$ sont sécants si et seulement si la famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ est libre.




## VI) Bases et repères cartésiens de l'espace

**Définition 1**

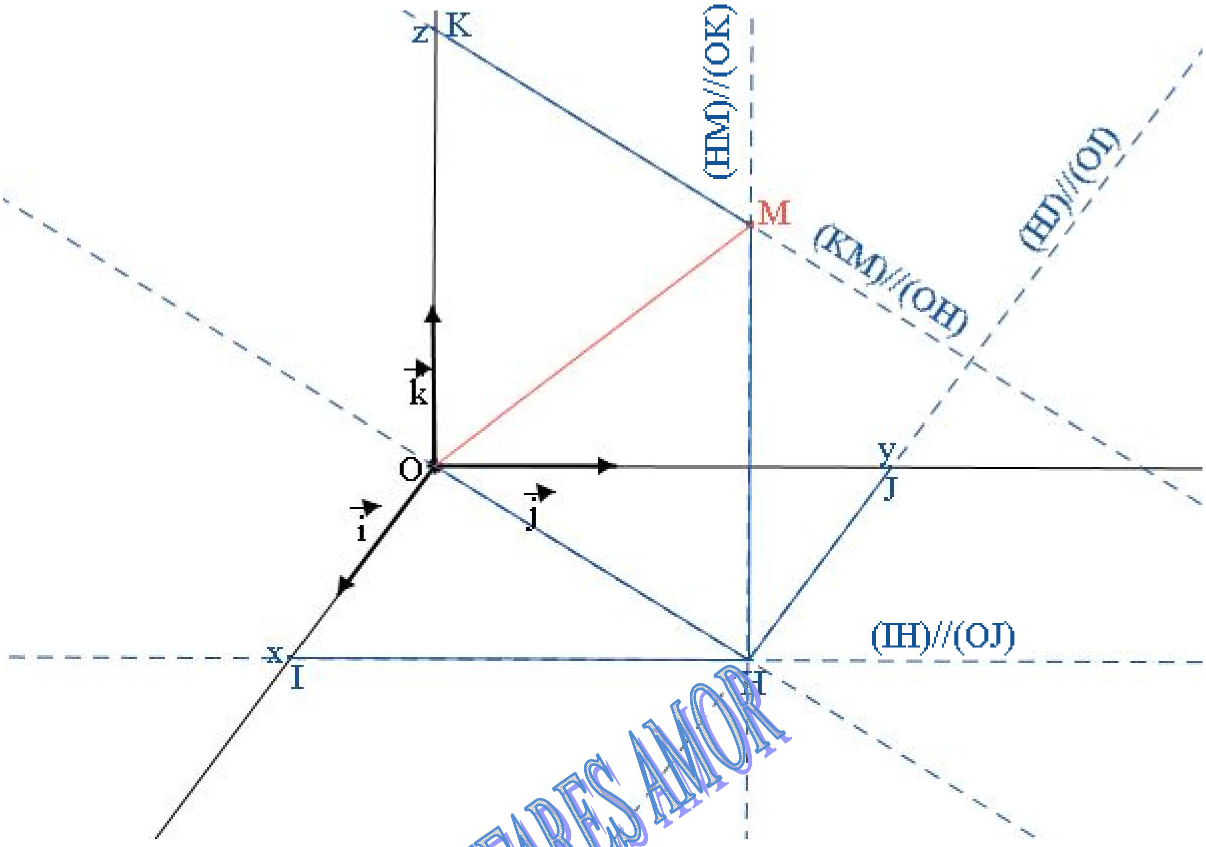
Le triplet $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et une base l'ensemble des vecteurs W de l'espace si et seulement si la famille $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ est libre.

**Définition 2**

Soit O un point fixe de l'espace. Le quadrilatère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère cartésien de l'espace si et seulement si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base de W.

**Conséquences**

► Tout point M est repéré dans l'espace par un triple unique de réels (x, y, z) c à d $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.




x est appelé l'abscisse de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

y est appelé l'ordonnée de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

z est appelé la cote de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$(O, \vec{i})$ est l'axe des abscisses.

$(O, \vec{j})$ est l'axe des ordonnées.

$(O, \vec{k})$ est l'axe des cotes.

► On sait qu'à tout vecteur $\vec{u}$ il existe un unique point M(x, y, z) tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ alors les réels x, y et z sont appelés les coordonnées ou encore les composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

► Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de l'espace et pour tout réel $\alpha$ on a :

☻ $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

☻ $\alpha\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$

☻ $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$

# VII) Déterminant de trois vecteurs

**Définition**

On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ dans cet ordre le réel noté $\text{dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$

et défini par $\text{dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = xy'z'' - xz'y'' - yx'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x''$

**Théorème**

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont linéairement indépendants si et seulement si $\text{dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0$.

# VIII) Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

**Définition**

Dans l'espace muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on donne la droite D passant par le point $A(x_0,y_0,z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. L'écriture $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \;;\alpha \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \alpha c \end{cases}$ est appelée une représentation paramétrique de la droite D. On écrit $D : \begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \;;\alpha \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \alpha c \end{cases}$



# IX) Représentation paramétrique d'un plan de l'espace

**Définition**

Dans l'espace muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on donne le plan P passant par le point $A(x_0,y_0,z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$. L'écriture $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta a' \\ y = y_0 + \alpha b + \beta b' \;;(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ z = z_0 + \alpha c + \beta c' \end{cases}$ est appelée une représentation paramétrique de P. On écrit $P : \begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta a' \\ y = y_0 + \alpha b + \beta b' \;;(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ z = z_0 + \alpha c + \beta c' \end{cases}$

# X) Equation cartésienne d'un plan de l'espace

**Théorème 1 et définition**

L'espace est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Un ensemble P des points M(x, y, z) de l'espace est un plan si et seulement s'il existe quatre réels a, b, c et d avec a, b et c sont non tous nuls tels que ax + by + cz + d = 0.

L'équation ax + by + cz + d = 0 est appelée équation cartésienne du plan P dans le repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On écrit P : ax + by + cz + d = 0.

**Théorème 2**

Soit P : ax + by + cz + d = 0 et $P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ deux plans de l'espace.

$P \,//\, P' \Leftrightarrow (a,b,c)$ et $(a',b',c')$ sont proportionnels

# XI) Produit scalaire dans l'espace

## Préliminaire

☻ On appelle angle de deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ de l'espace l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ et on le note $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ donc $0 \leq (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \leq \pi$.

☻ On appelle norme d'un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ de l'espace la longueur AB du segment [AB] et on la note $\|\vec{u}\|$.

☻ Un vecteur $\vec{u}$ de l'espace est dit unitaire ou encore normé si et seulement si $\|\vec{u}\| = 1$

## Définition du produit scalaire

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et est défini par :

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\vec{v} = 0$

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $\vec{u}\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

## Propriétés du produit scalaire

Comme dans le plan on a pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et pour tout réel $\alpha$ :



- ► $\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u}$
- ► $(\alpha\vec{u})\vec{v} = \vec{u}(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\vec{v})$
- ► $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$
- ► $|\vec{u}\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
- ► $|\vec{u}\vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- ► $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\vec{v}$
- ► $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\vec{v}$
- ► $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

## Orthogonalité de deux vecteurs de l'espace

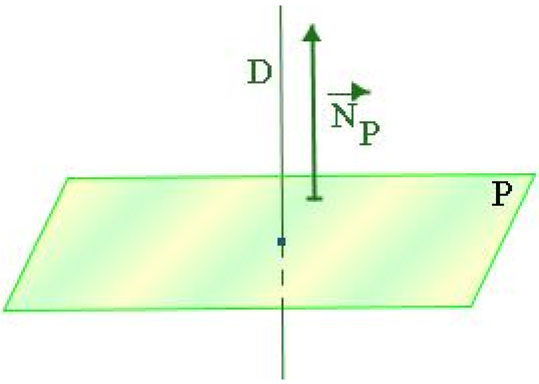
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\vec{v} = 0$

## Vecteur normal d'un plan

On appelle vecteur normal d'un plan P tout vecteur directeur d'une droite D perpendiculaire à P.

On note ce vecteur par $\overrightarrow{N_P}$.




## Conséquences

► Soit $D(A, \vec{u})$ et $D'(B, \vec{v})$ deux droites de l'espace.

$D \perp D' \Leftrightarrow \vec{u}\vec{v} = 0$

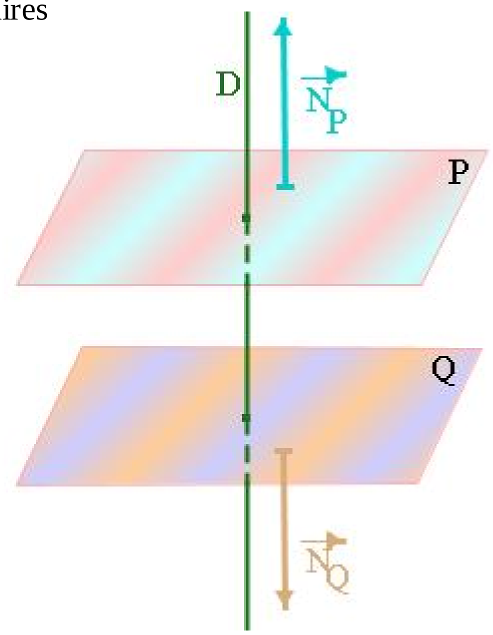
► Soit $D(A, \vec{u})$ une droite et P un plan de l'espace.

☻ $D \perp P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{N_P}$ sont colinéaires

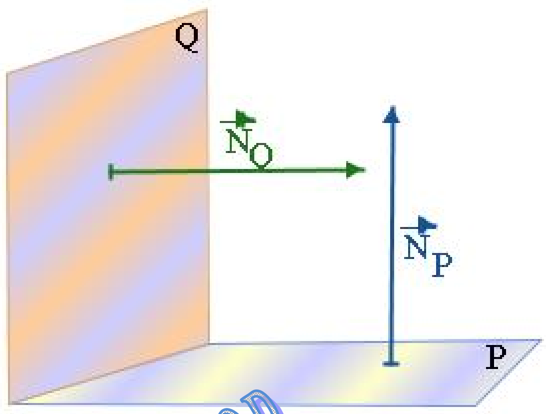
☻ $D \,//\, P \Leftrightarrow \vec{u}\vec{N_P} = 0$

▶ Soit P et Q deux plans de l'espace.

☻ $P \,//\, Q \Leftrightarrow \vec{N_P}$ et $\vec{N_Q}$ sont colinéaires




☻ $P \perp Q \Leftrightarrow \vec{N_P}\vec{N_Q} = 0$






**<u>Expression analytique du produit scalaire</u>**

▶ Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'ensemble des vecteurs de l'espace est dite orthonormée ou encore orthonormale si et seulement si $\begin{cases} \vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0 \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases}$

▶ Un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est dit orthonormé ou encore orthonormal si et seulement si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée.

▶ Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de l'espace muni d'un repère orthonormé on a :

☻ $\vec{u}\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ (c'est l'expression analytique du produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ )

☻ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$

☻ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

▶ Pour tous points A et B de l'espace muni d'un repère orthonormé on a :

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

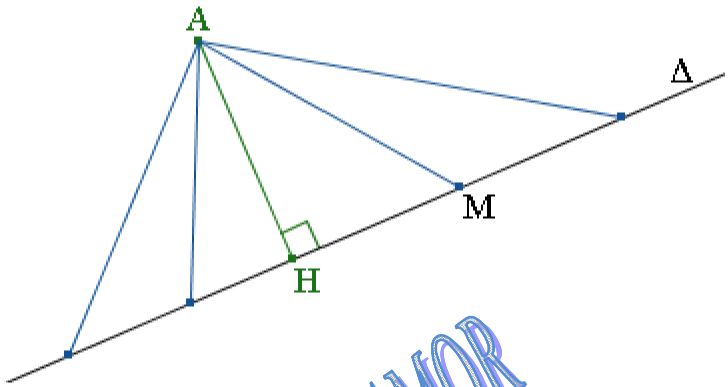
**Equation cartésienne d'un plan dans un repère orthonormé**

► Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace et $\vec{N}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\vec{N} = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{N}$. Ce plan a pour équation cartésienne : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

► Soit P : ax + by + cz + d = 0 un plan alors $\vec{N}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P.

**Distance d'un point à une droite**

Soit A un point et Δ une droite de l'espace. On appelle distance de A à Δ et on note d(A, Δ) la valeur minimale de AM lorsque M décrit la droite Δ c'est aussi la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur Δ.




**Distance d'un point à un plan**

Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé et P : ax + by + cz + d = 0 un plan. On appelle distance de A à P et on note d(A, P) la valeur minimale de AM lorsque M décrit P c'est aussi la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur P et elle est calculée par la formule d(A, P) = $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$