

EXERCICE N°1

Factoriser les polynômes $P(x) = x^4 - 1$ et $Q(x) = x^4 + 1$ en deux polynôme de second degré.

EXERCICE N°2

1°) Montrer qu'en posant $X = x + \frac{k}{x}$, toute équation de la forme :

$x^4 + ax^3 + bx^2 + k.ax + k^2 = 0$ ($k \neq 0$) se ramène à une équation de second degré.

2°) Résoudre alors les équations :

(a) $x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 1 = 0$

(b) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 0$

EXERCICE N°3

Soit le polynôme : $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

1°) Montrer que : $a = 1 + \sqrt{2}$ et $b = 1 - \sqrt{2}$ sont des racines de P .

2°) Factoriser alors $P(x)$.

EXERCICE N°4

Soit la fraction : $F(x) = \frac{2}{x^2 + 3x + 2}$

1°) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x différent de -1 et -2 , on a :

$$F(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

2°) Calculer alors la somme : $S = \frac{1}{1^2+3+2} + \frac{1}{2^2+3.2+2} + \frac{1}{3^2+3.3+2} + \dots + \frac{1}{n^2+3n+2}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

EXERCICE N°5

En utilisant le procédé de Horner, Calculer $P(2)$ et $P(3)$ avec $P(x) = x^6 - 4x^4 - x^2 + 4$

EXERCICE N°6

Soient : $P(x) = x^n + x + 1$ et $Q(x) = x^2 + 3x - 4$ où $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

On suppose qu'ils existe deux polynôme S et R tel que :

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x) \text{ avec } d^\circ R = 1$$

1°) Déterminer le $d^\circ S$

2°) Déterminer le polynôme $R(x)$ en fonction de x et n .

EXERCICE N°7

Soient u_1, u_2 et u_3 les racines d'une équation de troisième degré. ($ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$)

On pose : $u_1 + u_2 + u_3 = 6$ et $u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = 11$ et $u_1u_2u_3 = 6$

Calculer les sommes suivantes :

1°) $S_1 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$

2°) $S_2 = u_1^3 + u_2^3 + u_3^3$

3°) $S_3 = u_1^4 + u_2^4 + u_3^4$

EXERCICE N°8

1°) Déterminer un polynôme P de second degré tel que pour tout réel x on a : $P(x+1) - P(x) = x$

2°) En déduire la valeur de la somme : $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ où $n \in \mathbb{N}$

EXERCICE N°9

1°) Montrer que : $(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) = 1 - x^{n+1}$

2°) En déduire la valeur de la somme $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2009}$

EXERCICE N°10

Soit a, b et c trois réels tel que : $a+b+c=0$. On pose : $U = ab + bc + ac$ et $V = abc$.

Le but de l'exercice est de démontrer que : $\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)$

1°) Montrer que : $a^2 + b^2 + c^2 = -2.U$

2°) Etablir que pour tout réel x , on a : $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 + U.x - V$.

3°) En déduire les égalités suivantes :

$$a^3 = V - a.U ; a^4 = a.V - a^2.U ; a^5 = -U.V + a.U^2 + a^2.V$$

4°) A l'aide des égalités précédents, montrer que :

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3.V ; a^4 + b^4 + c^4 = 2.U^2 ; a^5 + b^5 + c^5 = -5.U.V$$

5°) En déduire alors que : $\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)$

