

EXERCICE N°1

Etablir que :

1°) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

2°) $x^6 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

3°) $x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x + y - \sqrt{2|xy|})(x + y + \sqrt{2|xy|})$

EXERCICE N°2

1°) Vérifier chacune des égalités suivantes

(a) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{10}$;

(b) $\sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}} = \sqrt{14}$;

(c) $12^3 = (9 + \sqrt{5})^3 + (9 - \sqrt{5})^3$

2°) Ecrire les nombres suivants sans radicaux au dénominateur.

$A = \frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$; $B = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$; $C = \frac{\sqrt{3} - 1}{4 - \frac{1}{\sqrt{3} + 1}}$

EXERCICE N°3

Soient a, b et c trois réels non nuls tels que : $abc = 1$ et $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

1°) Montrer que : $a + b + c = ab + bc + ac$.

2°) En déduire que l'un au moins des trois réels a, b, c est égal à 1.

EXERCICE N°4

Soit x un réel strictement positif.

1°) Soient $A = (1 + x)^2$ et $B = 1 + 2x$

(a) Comparer A et B .

(b) Lequel est plus grand : $a = (1,0000000000000003)^2$ ou $b = 1,0000000000000006$

2°) Soient $C = \frac{1}{1+x}$ et $D = 1 - x$

(a) Comparer C et D .

(b) Comparer : $c = \frac{1}{1,0000000001}$ et $d = 0,999999999$.

3°) Soit $0 < x < 1$ et soient $E = \frac{1+x}{1-x}$ et $F = 1 + 2x$.

(a) Calculer $E - F$ et comparer E et F .

(b) Comparer $e = \frac{1,000000001}{0,999999999}$ et $f = 1,000000002$

EXERCICE N°5

1°) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

2°) Simplifier alors l'expression : $E = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2006 \times 2007}$.

EXERCICE N°6

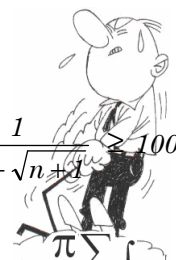
1°) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que : $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}$.

2°) Simplifier alors l'expression : $F = (1 - \frac{1}{2^2}) \times (1 - \frac{1}{3^2}) \times (1 - \frac{1}{4^2}) \times \dots \times (1 - \frac{1}{1000^2})$

EXERCICE N°7

1°) Soit n un entier naturel. Montrer que : $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

2°) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \geq 100$



EXERCICE N°8

Le but de l'exercice est de trouver tous les nombres entiers naturels a , b et c

tel que $a < b < c$ et $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

1°) Vérifier que $a \geq 2$.

2°) Etablir l'inégalité : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{3}{a}$. En déduire les valeurs possibles pour a .

3°) Montrer que : $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{2}{b}$. En déduire les valeurs possibles pour b .

4°) Conclure.

EXERCICE N°9

A°) Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a \leq b$.

On appelle « moyenne arithmétique de a et b » le nombre réel $m(a,b) = \frac{a+b}{2}$. Le nombre réel $g(a,b) = \sqrt{a \cdot b}$ est appelé « moyenne géométrique de a et b » et le nombre réel $h(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$ est appelé « moyenne harmonique de a et b » et le nombre réel

$q(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ est appelé « moyenne quadratique de a et b »

1°) Calculer $m(2,4)$, $g(2,4)$, $h(2,4)$ et $q(2,4)$.

2°) Montrer que : $a \leq h(a,b) \leq g(a,b) \leq m(a,b) \leq q(a,b) \leq b$.

3°) Montrer que : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

4°) En déduire que, pour tout réel a , b et c on a :

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2} (a+b+c)$$

5°) Montrer que, pour tout réel a , b et c on a : $a^2 + b^2 + c^2 \geq a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$

6°) En déduire que, pour tout réel a , b et c on a : $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$

B°) Soient x , y , z sont les longueurs des cotés d'un triangle :

1°) Montrer que :

$$x \geq \sqrt{x+y-z} \cdot \sqrt{x-y+z} ; y \geq \sqrt{y+x-z} \cdot \sqrt{y+z-x} \text{ et } z \geq \sqrt{y+z-x} \cdot \sqrt{x+z-y}$$

2°) Montrer alors que : $xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

3°) En déduire que : $(x+y)(y+z)(x+z) \geq 8(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

EXERCICE N°10

Soit $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-99| + |x-100|$. Montrer que $f(x)$ est constant pour $x \in [50,51]$.

EXERCICE N°1

Soit a et b des réels strictement positifs distincts. Montrer que l'inégalités suivantes :

(a) $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; (b) $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$;

(c) $\frac{8}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \leq \frac{2}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; (d) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$.

EXERCICE N°11

1°) Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} : $x^2 + 1 \geq 2x$

2°) En déduire que, pour tout a , b et c de \mathbb{R} : $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 8 \cdot a \cdot b \cdot c$

EXERCICE N°12

Soient a , b , c les longueurs de cotés d'un triangle.

Montrer que : $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 4(ab + bc + ca)$

EXERCICE N°13

Soient a et b deux réels tels que : $0 < a \leq b$.

Montrer que : $\frac{1}{8} \cdot \frac{(b-a)^2}{b} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{(b-a)^2}{a}$

EXERCICE N°14

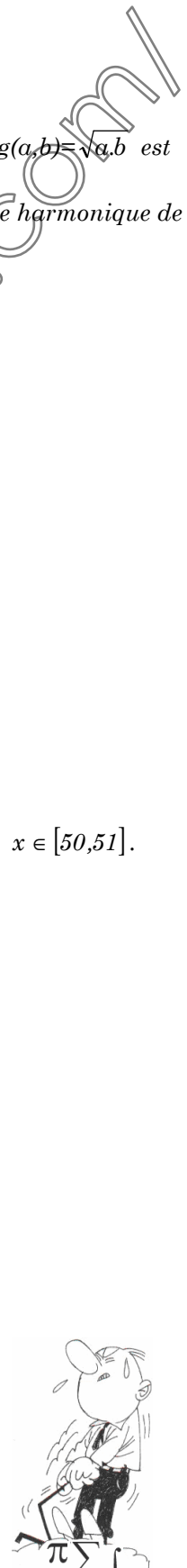
Traduisez à l'aide d'une valeur absolue chacune des affirmations :

1°) 1,63 est une valeur approchée de x à la précision 10^{-2} près.

2°) -0,35 est une valeur approchée de x à la précision $2 \cdot 10^{-2}$ près.

3°) 0,55 est une valeur approchée de x , par défaut à la précision 10^{-2} près.

4°) 3,15 est une valeur approchée de x , par excès à la précision 10^{-2} près.



EXERCICE N°15

Ptolémée, mathématicien grec, utilisait comme valeur approchée de $\sqrt{3}$ le nombre

$$a = \frac{103}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3}.$$

En utilisant la calculatrice, dire si est une valeur approchée par excès ou par défaut et déterminer la précision h de cette approximation.

EXERCICE N°16

Encadrer l'aire d'un rectangle dont les dimensions des cotés, à la précision d'un millimètre, sont 10 cm et 5 cm.

EXERCICE N°17

1°) Montrer que, pour tout x réel positif, on a : $1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2$

2°) Utiliser cette double inégalité pour obtenir des valeurs approchées de $\frac{1}{1,02}$

<http://maths-akir.nidiblogs.com/>

