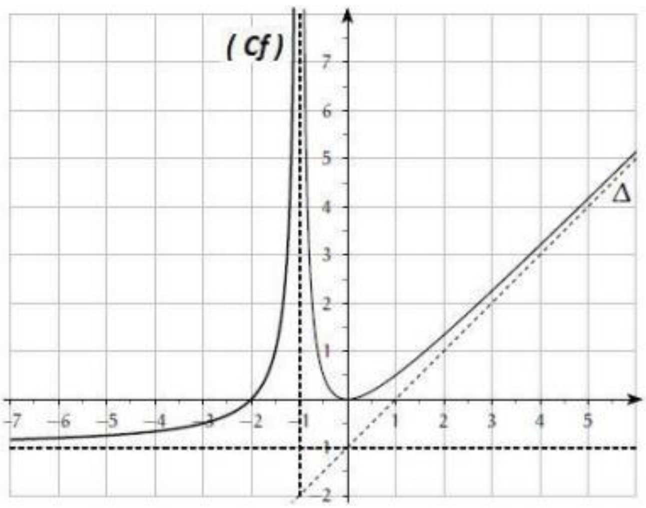
educate me Innovative education	DEVOIR DE CONTRÔLE N°1 EPREUVE : MATHEMATIQUES SECTION :4 TECHNIQUE	**Prof :CHEKIR MAHMOUD** **TEL : 99 078 850**

QCM : (2 points)

Cocher la réponse exacte. En justifiant

1) . Le nombre complexe $(1+i)^6$ est :
   a/ un réel   b/ imaginaire pur   c/ ni réel ni imaginaire
2) Le conjugué du nombre complexe 1 - i Z est :
   a/ $1 + i\bar{Z}$ b/ $1 + i Z$ c/ $1 - i\bar{Z}$
3) La forme exponentielle du complexe $1+e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0\,;\pi[$ est :
   a/ $e^{i\frac{\theta}{2}}$ b/ $2\sin\frac{\theta}{2}\ e^{i\frac{\theta}{2}}$ c/ $2\cos\frac{\theta}{2}\ e^{i\frac{\theta}{2}}$
4) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x)+x=3$ alors sa courbe C_f représentative dans un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ admet au voisinage de $(+\infty)$ une asymptote d'équation :
   a/ y= x-3   b/ y = x+3   c/ y = - x +3

Exercice 1 : (3 points)



*La courbe **(Cf)** ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur IR \ { - 1 } .*

***A)** Par lecture graphique , déterminer :*

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x]$ et $f(]-\infty\,;-2])$.

2) *Dresser le tableau de variations de f .*

3) *Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solution(s) de l'équation : f (x) = m .*

***B)** Soit la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$.*

Déterminer le domaine de définition de g .

Exercice 2: (4 points)

Dans le plan muni d'un repère $R = (O; \vec{u}\,; \vec{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -2 + i$; $z_B = -3i$; $z_C = 6 + 5i$.

1/Placer ces trois points dans le repère $R = (O; \vec{u}\,; \vec{v})$.

2/Déterminer une mesure d'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}})$.

3/Montrer alors que le triangle ABC est un triangle rectangle.

4/On considère le point D d'affixe $z_D = 4 - i$.

a) Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z définie par: $Z=\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$

b) Justifier que la demi-droite [AD] est la bissectrice de l'angle$(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}})$.

5/On désigne par E l'ensemble des points M(z) tel que $\left|\frac{z_B-z_A}{z_M-z_A}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

a)Vérifier que D est un point de E.

b)Déterminer et construire E.

Exercice 3: (4 points)

*Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}\,, \vec{j})$. On donne les points **A, B, C** et **I** d'affixes respectives 4 ; 2i ; 3+3i et 1.*

*1) Montrer que le triangle **ABC** est isocèle rectangle en C.*

*2) On associe, à tout point **M** d'affixe $z\neq 2i$, le point **M'** d'affixe $z'=\frac{z-4}{z-2i}$*

*a- Montrer que **IM'.BM**=$2\sqrt{5}$.*

*b- En déduire que si **M'**appartient au cercle (C') de centre **I** et de rayon $\sqrt{5}$ alors M varie sur un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.*

*3) a- Déterminer et construire l'ensemble (E) des points **M** lorsque $|z'|=1$.*

*b- Déterminer et construire l'ensemble (E') des points **M** pour que z' soit un réel.*

Exercice 4: (2 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,; \vec{u}, \vec{v})$.
On nomme J le point d'affixe i

À tout point M d'affixe z différent de i, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = i + \frac{2}{\bar{z}+i}$

1. a. Déterminer l'affixe de l'image du point I d'affixe 1.
   b. Déterminer l'affixe de l'image du point A d'affixe 1+ i.
2. montrer que M' = M $\Leftrightarrow$M appartient au cercle de centre J et de rayon $\sqrt{2}$
3. a. vérifier que $\frac{z'-i}{z-i} \in \mathbb{R}$ Interpréter géométriquement ce résultat.
   b. montrer que $\forall$ M≠ J on a : JM. JM' = 2

Déduire que si M $\in \mathscr{C}$ (J,2),alors M' appartient un cercle fixe que l'on précisera

Exercice 5: (5 points)

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+2} & si\ x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x^2}{4\sqrt{x^2+1}-1} & si\ \ x < 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0 .

2) a) Montrer que pour tout x ≥ 0 on a : $\frac{1-\sqrt{x}}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+2}$

b) Calculer alors $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} [f(x) + \frac{1}{4}x]$

b) Interpréter graphiquement le résultat .

4) a) Montrer que f(x) = 0 admet au moins une solution α dans $]\frac{\pi}{2} ; \pi[$

b.) Montrer que $\tan(\alpha) = -\sqrt{\alpha - 1}$

BONNE CHANCE

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{ix} = \cos x + i \sin x.$

$e^0 = 1,\ e^{i\pi/2} = i,\ e^{i\pi} = -1,\ e^{-i\pi/2} = -i$

$\forall x \in \mathbb{R},\ |e^{ix}| = 1.$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)},\quad \frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)},\quad \frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ et $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (e^{ix})^n = e^{inx}.$