Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 1** Mathématiques	Classe : 4 ème Tech 2
Date : 09 /12 / 2015	Prof : Meddeb Tarek	Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (3 pts)

Pour chaque question, une seule des trois propositions a/, b/ et c/ est correcte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 =$

$a/\ 8i$ $\qquad b/\ -8$ $\qquad c/\ -8i$

2) Une racine carrée de $\sqrt{3}-i$ est :

$a/\ \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$ $\qquad b/\ -1+i\sqrt{3}$ $\qquad c/\ \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{12}}$

3) Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation : $z^2+\left(\sqrt{3}-2i\right)z+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$ alors

$\arg(z_1)+\arg(z_2)$ est égale à

$a/\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ $\qquad b/\ -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ $\qquad c/\ \dfrac{\pi}{3}+2k\pi$

4) Soit f une fonction dérivable sur $[-2\ ;\ 3]$ telle que $4\le f'(x)\le 6$ pour tout $x\in[-2\ ;\ 3]$ alors

$a/\ 20\le f(3)-f(-2)\le 30$

$b/\ 4\le f(3)-f(-2)\le 6$

$c/\ 8\le f(3)-f(-2)\le 18$

Exercice n°2 : (6 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) $a/$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-\left(\sqrt{3}+i\right)z+\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$.

$b/$ Soient A et B les point d'affixes respectives $z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ et $z_B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

Mettre z_A et z_B sous la forme exponentielle.

$c/$ Montrer que le triangle OAB est rectangle en O.

2) Soit θ un réel de l'intervalle $[0\ ;\ \pi[$.

On considère l'équation : $(E): z^2-\left(2\cos\theta+i\right)z+1+\sin\theta+i\cos\theta=0$.

$a/$ Vérifier que $\left[\left(2\sin\theta+1\right)i\right]^2=4\cos^2\theta-4\sin\theta-5$.

$b/$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3) On considère les points I, M et N d'affixe respectives $z_I=i$, $z_M=i+e^{i\theta}$ et $z_N=e^{-i\theta}$.

Déterminer θ pour $OIMN$ soit un parallélogramme.

Exercice n°3 : **(4 pts)**

Soit f la fonction définie sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2) On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f.

   Calculer $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$.

3) $a/$ Montrer que f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

   $b/$ Montrer que, pour tout $x\in\,]1\,;+\infty[$ on a : $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Exercice n°4 : **(7 pts)**

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}+2$.

La représentation graphique $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est donnée sur l'annexe ci-joint.

1) $a/$ Montrer que, pour tout $x\in IR$, $f(x)=\dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}+2$.

   $b/$ En déduire que la droite D : $y=2$ est une asymptote de $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

   $c/$ Montrer que la droite Δ : $y=2x+2$ est une asymptote de $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

   $d/$ Tracer D et Δ sur la feuille annexe.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $x\in IR$, $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}$.

   $b/$ Dresser le tableau de variations de f.

   $c/$ Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle K que l'on précisera.

3) $a/$ Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet dans IR une solution unique $\alpha\in\,]-1\ ;\ 0[$.

   $b/$ Montrer que $f'(\alpha)=\dfrac{2}{\alpha+2}$.

4) On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f.

   $a/$ Etablir le tableau de variations de f^{-1}.

   $b/$ Tracer $\mathscr{C}'$ la représentation graphique de f^{-1} dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ de la feuille annexe.

Bonne chance

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de synthèse n°1 *(09 – 12 – 2015)*

Nom et prénom :………………………………………………. *Classe : 4 ème Tech ...*