Lycee Majida Boulila **Mme Triki Ikhlas**	**DEVOIR DE SYNTHESE N°1** **(13-12-2015)**	**4tech1** **2015-2016**

Exercice n°1 (2points)

1) Vérifier que $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ est une racine quatrième de (-4)

2) En déduire les autres racines quatrièmes de (-4) et les donner sous forme algébrique et trigonométrique

Exercice n°2 (7points)

Soit l'équation $(E): z^2+(1-3i)z-2i-2=0$

On désigne par z_1 et z_2 les deux solutions de (E)

1) a- Sans calculer z_1 et z_2 vérifier que $|z_1 \times z_2| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z_1 \times z_2) = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

b-Vérifier que $z_1 = 2i$ est une solution de (E)

c- En déduire l'écriture exponentielle puis l'écriture cartésienne de z_2

2) Soit $(E'): z^3-(1+3i)z^2-(4-4i)z+2(2i+2)=0$

a- Vérifier que 2 est une solution de (E')

b- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E')

3) Soit $(E_1): z^2+2e^{i\theta}z+e^{2i\theta}-1=0$:

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1)

4) Soit A, B et C les points d'affixes respectifs : $2e^{i\theta}$, $1+e^{i\theta}$ et $-1+e^{i\theta}$

a- Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle

b- Montrer que $OBAC$ est un rectangle

c-Déterminer le réel $\theta \in 0,\pi$ tel que $OBAC$ est un carré

d- Soit I le centre du rectangle $OBAC$. Déterminer l'affixe du point D tel que $OIBD$ est un losange

e- Déterminer le réel $\theta \in 0,\pi$ tel que l'aire du losange $OIBD$ égale a $\frac{1}{2}$

Exercice n°3 (7points)

Soit f la fonction définie sur $0,+\infty$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}+1$ et $f(0)=1$

C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j)

1)a) Montrer que f est dérivable a droite en 0

b) Donner l'équation de la demi tangente a C_f a droite au point d'abscisse 0

2) a- Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, Interpréter graphiquement le résultat obtenu

b-Montrer que f est dérivable sur $0,+\infty$ et que $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}(\sqrt{x^2+4}+2)}$

c- Dresser le tableau de variation de f

3) Montrer que pour tout $x \in 0,+\infty$ $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

4) Soit $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$

a- Montrer que g est strictement décroissante pour tout $x \in 0,+\infty$

b- Montrer que $g(x)=0$ admet une seule solution $\alpha \in 0,+\infty$ et que $\alpha \in 3,4$

c- Montrer que $\left|2\sqrt{5}-2-\alpha\right| \leq \frac{1}{2}\left|1-\alpha\right|$

5) a- Montrer que f réalise une bijection de $0,+\infty$ sur $1,2$

b- Justifier que f^{-1} est dérivable sur $1,2$, et calculer $f^{-1}(\frac{4}{3})$ et $(f^{-1})'(\frac{4}{3})$

c- Dresser le tableau de variation de f^{-1}

d- Sur l'annexe ci-joint C_f est la courbe représentative de f et T la tangente à C_f a droite au point d'abscisse 0 Tracer $C_{f^{-1}}$

Exercice n °4 (4points)

L'espace est muni d'un repère cartésien (O,i,j,k) on les points $A(-2,0,1)$, $B(1,2,-1)$ et $C(-2,2,2)$

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés

2) Montrer qu' une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x-y+2z+2=0$

3) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB)

4) Soit D une droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=2\alpha-2 \\ y=\alpha+2 \quad \alpha\in\mathbb{R} \\ z=-\alpha+2 \end{cases}$

a-Etudier la position relative de D et (AB)

b- Montrer que D et (ABC) sont sécantes en un point que l'on précisera