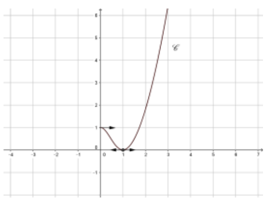
l.s Ibn-Elhaytham AS: 2015/2016	**Devoir de contrôle n°1** **Mathématiques**	Classes:4eme tech Durée: 2h

Exercice n°1(4 points)



Dans le graphique précédent on a représenté dans un repère orthonormé la fonction f définie sur [0, +∞[par f(x) = $\frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$.

- La courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

- La courbe admet une branche infinie parabolique de direction celle de l'axe (O, $\vec{j}$) au voisinage de +∞.

1) Par une lecture graphique :

a) Déterminer f(0), f(1), f'(1), et f'(0).

b) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) Déterminer le signe de f'(x) pour x ≥ 0.

d) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f(x) = $\frac{x^4-2x^2+1}{x^2+1}$.

b) Calculer f'(x).

c) Montrer que l'équation f(x) = $\frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans [1, 2].

d) Montrer que α^2 est une solution de l'équation $2t^2-5t+1=0$. En déduire la valeur de α.

<u>Exercice n°2</u>(6 points)

1) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $2z^2-(1+i(\sqrt{3}-2))z+\sqrt{3}-i=0$.

a) Vérifier que (-i) est une solution de l'équation (E).

b) Déduire l'autre solution.

c) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E).

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé on donne les points A, B, E et F d'affixes respectifs a = $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$; b = $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(-1+i)$; 1 et –i.

a) placer dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points E, F et A.

b) vérifier que b – a = i(a + i).

c) En déduire que le triangle ABF est rectangle et isocèle en A.

3) construire le point B.

<u>Exercice n°3</u> (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = x^2\cos(\frac{1}{x}). & \text{Si } x < 0. \\ f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, interpréter graphiquement le résultat.

2) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Montrer que pour tout $x < 0$ on a $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$.

b) En déduire que f est continue en 0.

4) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par g(x) = $\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$

a) Montrer que g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et g'(x) = $\frac{1}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$.

b) Montrer que l'équation g(x) = $\frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,,+\infty[$.

Exercice n°4 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) on donne les points A et B d'affixes respectives z_A = - i et z_B = i.

A tout points M d'affixe z $\neq -i$ on associe le point M' d'affixe z' = $\frac{z-i}{1-iz}$.

1) a) Montrer que z' = $\frac{i(z-i)}{z+i}$.

b) Montrer que $|z'|$ = $\frac{BM}{AM}$.

c) Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'|$ = 1.

2) a) Montrer que $|z'-i||z+i|$ = 2.

b) En déduire que si M appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 2 alors M' appartient à un cercle (C') dont on déterminera le centre et le rayon.

Bon travail