4 Tech4 | **Devoir de contrôle n°1** | 28/10/2015

L.S-Boubaker | **Epreuve de mathématiques** | Durée : 2 heures

Exercice 1 (5 points)

On considère les nombres complexes $z_1 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1) a- Mettre z_1 et z_2 sous la forme exponentielle.

b- En déduire la forme exponentielle de chacun des nombres complexes :

$(-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2})^3$; $-3i\,(2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2})$; $(2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2})(\sqrt{3} - i)$ et $\dfrac{2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{\sqrt{3} - i}$.

2) a- Calculer le produit $z_1 z_2$ sous la forme algébrique.

b- Déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

c- Prouver alors que $\tan(\frac{\pi}{12}) = 2 - \sqrt{3}$.

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points A, B, C et I d'affixes respectives 4 ; 2i ; 3+3i et 1.

1) Montrer que le triangle ABC est isocèle rectangle en C.

2) On associe, à tout point M d'affixe $z \neq 2i$, le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-4}{z-2i}$.

a- Montrer que $IM'.BM = 2\sqrt{5}$.

b- En déduire que si M'appartient au cercle (C') de centre I et de rayon $\sqrt{5}$ alors M varie sur un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

3) a- Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M lorsque $|z'| = 1$.

b- Déterminer et construire l'ensemble (E') des points M pour que z' soit un réel.

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} 1 - \dfrac{\sin(4x)}{x} & si\ x < 0 \\ x^3 + 2x - 3 & si\ x \geq 0 \end{cases}$.

1) a- Montrer que pour tout $x < 0$, on a : $1 + \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 - \frac{1}{x}$.

b- En déduire $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x})$.

3) a- Montrer que f est continue en 0.

b- Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$.

4) a- Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution dans]0 ; 2[.

b- Donner le signe de f(x) lorsque x varie dans [0 ; +∞ [.

Exercice 4 (4 points)

La courbe ci-dessous, représente une fonction g définie sur [-5 ; 5] et on admet que g(-4)=-2, g(-1)=1, g(2)=3 et g(4)=-1.4 .

1) a- Dresser le tableau de variation de g sur [-4 ; 4].

b- Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution dans]2 ; 4[.

2) Soit f la fonction définie par $f(x)=3x^2-x+2+3\sin x$.

a- Justifier la continuité de f sur IR.

b- Montrer que $\frac{f}{g}$ est continue sur [-1 ; 3].

c- Montrer que $\sqrt{g}$ est continue sur [-1 ; 3].