Lycée Houmet Souk 1	Devoir de Contrôle N : 1	4 Technique 5
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	11 - 11 - 2014

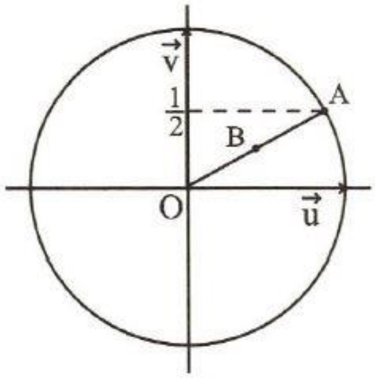
EXERCICE N : 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes , une seule des trois réponses proposées est exacte . Sans justification , le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie .

1) Dans la figure ci-contre ($O , \vec{u} , \vec{v}$) est un repère orthonormé direct

et A le point du cercle trigonométrique d'ordonnée $\frac{1}{2}$.

Si B est le milieu du segment [OA] alors l'affixe du point B est



a) $\frac{\sqrt{2}+i}{4}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}+i}{4}$

2) L'ensemble des points M d'affixe Z tels que : $(Z - i) (\overline{Z} + i) = 1$ est

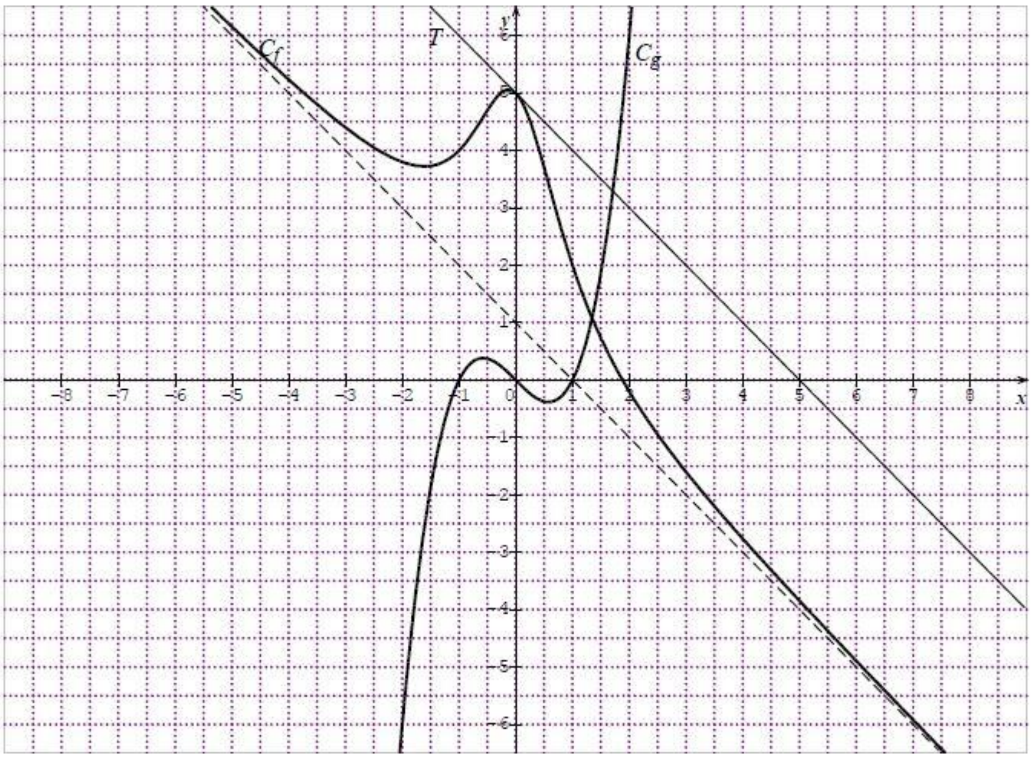
a) un point **b)** une droite **c)** un cercle

3) Le module du nombre complexe $1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est égal à

a) 1 **b)** $\sqrt{2}$ **c)** 2

EXERCICE N : 2 (5 points)

Soient f et g deux fonctions définies sur IR par les courbes représentatives ci-dessous :



1) Déterminer : $f'(0)$; $f\circ g(-1)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{g(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} g\circ f(x)$; $g(\,]-\infty\,;-1[\,)$ et $f\circ g(\,[1\,;+\infty[\,)$

2) Donner la nature de la branche infinie de la courbe de $f\circ g$ au voisinage de $+\infty$. (Justifier)

EXERCICE N : 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1 et par A et J les points d'affixes respectives : $a = \sqrt{3} + i$ et 1 .

1) a) Donner la forme exponentielle de a .

b) Construire le point A .

2) Soit B le point d'affixe $b = \dfrac{a-1}{1-\overline{a}}$.

a) Vérifier que $b\overline{b} = 1$. En déduire que le point B appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

b) Montrer que $\dfrac{b-1}{a-1}$ est un réel . Interpréter graphiquement ce résultat .

c) Déduire alors la Construction du point B .

3) Soit θ un argument du nombre complexe b . Montrer que : $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

EXERCICE N : 4 (7 points)

A) On considère la fonction f définie sur IR* par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+8}-2 & \text{si } x \in]-\infty; -1] \\ x\sin(\frac{\pi}{2x}) & \text{si } x \in]-1;+\infty[\setminus \{0\} \end{cases}$

On désigne par **(C f)** sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que la droite $\Delta : y = -x-2$ est une asymptote à **(C f)** au voisinage de $-\infty$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et Interpréter graphiquement ce résultat .

2) Montrer que f est continue en -1 .

3) a) Vérifier que pout tout $x \in]-1;+\infty[\setminus \{0\}$ on a : $|f(x)| \leq |x|$.

b) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 .

4) Montrer que l'équation: $f(x) = \dfrac{6}{5}$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]1;3[$.

5) a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty;-1]$ et calculer $f'(x)$ sur cet intervalle .

b) Montrer que f est dérivable sur $]-1;+\infty[\setminus \{0\}$ et calculer $f'(x)$ sur cet intervalle .

c) En utilisant le théorème des accroissements finis sur $[1;\alpha]$ pour la fonction f , montrer qu'il existe un réel $\theta \in]1;3[$ tel que : $\sin(\dfrac{\pi}{2\theta}) - \dfrac{\pi}{2\theta}\cos(\dfrac{\pi}{2\theta}) = \dfrac{1}{5(\alpha-1)}$.

Bon travail.