Devoir de contrôle N°1

Saidani moêz
06/11/2014
4T3

EXERCICE N°1 (3pts)
Cocher la bonne réponse (sans justification)

$\lim\limits_{0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x} =$	0	$+\infty$	$-\infty$
l'équation $x^3+3x+2=0$ admet une solution unique α dans	$]-1,-0.9[$	$]-0.8,-0.7[$	$]-0.6,-0.5[$
un argument de nombre complexe $z=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$

EXERCICE N°2 (4pts)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{4} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x - \dfrac{4}{x} & \text{si } 2 < x \end{cases}$

On note ξ sa courbe répresentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. et interpréter graphiquement le résultat obtenu;
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x)-x)$.interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Montrer que f est continue en 2
3. Etudier la dérivabilité de f en 2

EXERCICE N°3 (4pts)

1. Soit l'équation $(E) : z^2-(2+3i)z-2+2i=0$
   (a) Ecrire sous la forme algébrique $(2+i)^2$
   (b) Résoudre alors l'équation (E).
2. Soit l'équation $(E') : z^3-(3+2i)z^2+3(1+i)z-2+2i=0$
   (a) Vérifier que $(1-i)$ est une solution de (E')
   (b) Résoudre alors l'équation (E')

EXERCICE N°4 (6pts)
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2-3i$, $z_B = i$ et $z_c = 6-i$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mésure des questions.
On considère l'application f qui, à tout M d'affixe z distincte de i associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{i(z-2+3i)}{z-i}.$$

1. Calculer $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$. En déduire la nature du triangle ABC.

2. Soit E le point d'affixe $2i$.

   (a) Montrer que $f(E) = E$.

   (b) Démontrer que $E \in (AB)$.

3. (a) Montrer que pour tout M distinct du point B, $OM' = \dfrac{AM}{BM}$.

   (b) En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

   (c) Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du médiatrice du segment $[AB]$ alors le point M'. appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon .

4. Démontrer que pour tout point M distinct de A et B,on a $\left(\widehat{\vec{i}\,,\overrightarrow{OM'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}}\right) + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice N°5 (3pts)

1. Montrer que pour tout x et y appartiennent à $\left[-\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}\right]$, $|\cos^2 x - \cos^2 y| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$.

2. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $x \leq \tan x \leq 2x$.