Lycée secondaire : 18 / 01 / 52 Djebeniana . date : 19/11/2011	DEVOIR DE CONTRÔLE N°1 (MATHÉMATIQUES)	Profs : ZAATOUR E & ABID H Classes : $4^{ème}$ année sc tech 1 & 2 Durée : 2 heures

Exercice 1 : (4 points).

Trouver la seule bonne réponse.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x.\sin\frac{1}{x} =$

a) 0 b) 1 c) $+\infty$

2) L'image de l'intervalle $[-1, 2]$ par la fonction $f : x \to x^2$ est

a) $[0 , 4]$ b) $[1, 4]$ c) $[-1 , 4]$

3) Soit x un réel. Le nombre complexe z défini par : $z = \frac{x-i}{x+i}$ a pour module :

a) 1 b) $\frac{x-1}{x+1}$ c) $\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$

4) Un argument du nombre complexe : $-1 + i\sqrt{3}$ est :

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $-\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$

Exercice 2 : (4 points)

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\cos\pi x}{1-x} & \text{si } x \in]-\infty , 0[\\ f(x) = x^3 - 12x + 1 & \text{si } x \in [0 , 2[\\ f(x) = 1 + x - \sqrt{x^2-4} & \text{si } x \in [2 , +\infty[\end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) a - Montrer que pour tout $x < 0$, on a : $\frac{1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{1}{1-x}$.

b - Déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3) a - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$.

b - Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} prés.

Exercice 3 : (6 points)

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O , \vec{u} , \vec{v})$; on donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = i - \sqrt{3}$.

1) a - Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

b - Placer les points A et B dans le repère $(O , \vec{u} , \vec{v})$.

c - Montrer que $(z_A)^6 + (z_B)^6 = 0$.

2) Soit le point C d'affixe $z_c = z_A + z_B$.

a - Monter que $(OA) \perp (OB)$.

Exercice 4 : (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère les point A(- i) et B(i)

A tout point M du plan distinct de A et d'affixe z ,on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \dfrac{z - i}{1 - iz}$

1) Déterminer l’ensemble des points M tel que z’ soit réel.

2) a - Vérifier que $z' = \dfrac{i(z - i)}{z + i}$

b - Montrer que $|z'| = \dfrac{BM}{AM}$.

c - Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$.

3) a - Montrer que $|z' - i| \times |z + i| = 2$.

b - En déduire que si M appartient a un cercle ζ de centre A et de rayon 2 alors M' appartient à un cercle ζ' que l'on déterminera le centre et le rayon .

Correction

Correction

Exercice 1 :

1) b 2)a 3)a 4)c

Exercice 2 :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 + x - \sqrt{x^2-4} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{(x-\sqrt{x^2-4})(x+\sqrt{x^2-4})}{x+\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{x^2-x^2+4}{x+\sqrt{x^2-4}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{4}{x+\sqrt{x^2-4}} = 1 + 0 = \mathbf{1}.$

2) a - Pour $x < 0$,$f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{1-x}$.

On a $\forall x \in IR$, $-1 \le \cos(\pi x) \le 1$et comme $x < 0$ alors $x - 1< 0$ donc $\frac{-1}{x-1} \ge \frac{\cos(\pi x)}{x-1} \ge \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \le \frac{\cos(\pi x)}{x-1} \le \frac{1}{1-x}$

b - $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x-1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0.$

3) a – Pour $x \in [0,1]$ **,** $f(x) = x^3 - 12x+ 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$

<u>signe de $3x^2 - 12$ sur IR :</u>

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	

Pour $x \in [0,1]$, $f'(x) < 0$ $\Rightarrow$ f est strictement décroissante sur [0,1].

$\begin{cases} \text{f est continue et strictement décroissante sur } [0,1] \\ f(0) \times f(1) < 0 \end{cases} \Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$.

b - $f(0) = 1$ et $f(0,1) = - 0,19\ldots \Rightarrow \mathbf{0 < \alpha < 0,1}$

Exercice 3 :

1) a - $|z_A| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$

Soit θ un argument de z_A . $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.$\Rightarrow$ $\mathbf{z_A = 2e^{i\pi/3}}$

$|z_B| = |i - \sqrt{3}| = \sqrt{3+1} = 2$

Soit θ' un argument de z_B . $\cos\theta' = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;$\sin\theta' = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta' = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.$\Rightarrow$ $\mathbf{z_A = 2e^{i5\pi/6}}$

b -

c - $(z_A)^6 + (z_B)^6 = (2e^{i\pi/3})^6 + (2e^{i5\pi/6})^6 = 2^6 e^{2\pi} + 2^6 e^{i5\pi} = 2^6 - 2^6 = 0$

2) $z_c = z_A + z_B$.

a) $z_{OA} / z_{OB} = \frac{z_A}{z_B} = \frac{2e^{i\pi 3}}{2e^{i5\pi/6}} = e^{-i\pi/2} = - i \Rightarrow \frac{z_A}{z_B}$ est imaginaire pur $\Rightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Rightarrow (OA) \perp (OB)$.

b) $z_c = z_A + z_B \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow$ OACB est un parallélogramme et comme $(OA) \perp (OB)$ et OA = OB $\Rightarrow$ OACB est un carré.

c) $(\vec{u},\overrightarrow{OC}) = (\vec{u},\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

$|z_c| = \sqrt{2}OA = 2\sqrt{2}$

Donc $z_c = 2\sqrt{2}\, e^{i7\pi/12}$

d) $\begin{cases} z_c = z_A + z_B = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3}) \\ z_c = 2\sqrt{2}\, e^{i7\pi/12} \end{cases} \Rightarrow \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercice 4 :

1) z' est réel $z' = \overline{z'} \Leftrightarrow \frac{z-i}{1-iz} = \frac{\overline{z}+i}{1+i\overline{z}} \Leftrightarrow (z-i)(1+i\overline{z}) = (1-iz)(\overline{z}+i) \Leftrightarrow z + iz\overline{z} - i + \overline{z} = \overline{z} + i - iz\overline{z} + z \Leftrightarrow 2iz\overline{z} = 2i \Leftrightarrow z\overline{z} = 1.$

On pose $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ c-à-d $M(x,y)$. $z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow M \in$ cercle de centre o et de rayon 1, mais comme $M \neq A$ et OA = 1 alors $M \in$ cercle de centre o et de rayon 1 privé du point A.

2) a) $z' = \dfrac{z-i}{1-iz} = \dfrac{i(z-i)}{i(1-iz)} = \mathbf{\dfrac{i(z-i)}{z+i}}$

b) $|z'| = \left|\dfrac{i(z-i)}{z+i}\right| = \dfrac{|i(z-i)|}{|z+i|} = \dfrac{|i||z-i|}{|z+i|} = \dfrac{|z-i|}{|z+i|} = \mathbf{\dfrac{BM}{AM}}$

c) $|z'| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in$ médiatrice de [AB].

3) a) $|z' - i| \times |z+i| = \left|\dfrac{i(z-i)}{z+i} - i\right| \times |z+i| = \left|\dfrac{iz+1-iz+1}{z+i}\right| \times |z+i| = \dfrac{2}{|z+i|} \times |z+i| = 2$.

b) $|z' - i| \times |z+i| = 2 \Leftrightarrow BM' \times AM = 2$

Si $M \in$ cercle $\zeta_{(A,2)}$ alors $AM = 2 \Rightarrow BM' \times 2 = 2 \Leftrightarrow BM' = 1 \Leftrightarrow$ **M' ∈ cercle ∈** $\boldsymbol{\zeta'_{(B,1)}}$