REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
LYCEE SECONDAIRE MATEUR

DEVOIR DE CONTRÔLE N 1 - ANNEE SCOLAIRE : 2011-12

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE :** 2h **COEFFICIENT :** 3
PROFESSEUR : HATEM EDDHAOUI

''Il est recommandé de soigner la rédaction et la présentation de la copie''

Exercice 1 (3 points)

*Répondre par **vrai** ou **faux** <u>en justifiant la réponse</u> :*

1) Lorsque θ varie dans $[0,\pi]$, le point M d'affixe $i+2e^{i\theta}$ varie sur un cercle.
2) Si z est un nombre complexe tel que $|z|=2$, alors $|\bar{z}+i\bar{z}|=2\sqrt{2}$.
3) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, et si, pour tout $x\leq 2, g(x)=4x-\sqrt{2-x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x)=+\infty$.

Exercice 2 (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, -3i et –i.

Pour tout point M du plan d'affixe z (z≠ -3i), on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$z'=\dfrac{iz-1}{z+3i}$.

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'|=1$.
3) a) Vérifier que (z' – i)(z + 3i) = 2.

   b) En déduire que AM'.BM = 2 et que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM'}})+(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})\equiv 0[2\pi]$.

4) Soit le point E d'affixe $z_E=-3i-2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

   a) Calculer BE.

   b) Déterminer $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BE}})$.

Exercice 3 (6 points)

A/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2-1} & \text{si } x < -1 \\ 4x^3+6x^2-1 & \text{si } -1\le x\le 0 \\ \dfrac{1-\cos(\pi x)}{x}-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $-1\le f(x)\le \dfrac{2}{x}-1$.

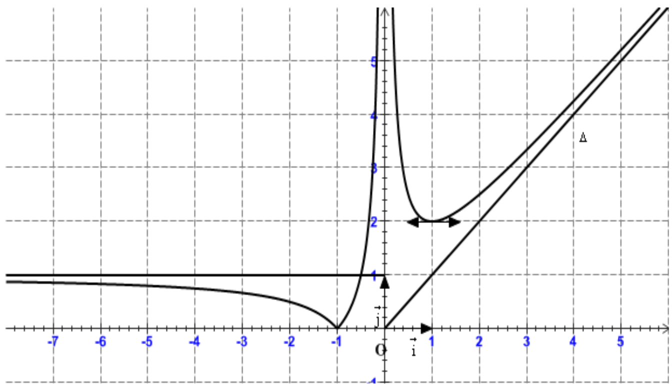
   c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Etudier la continuité de f en (-1) et en 0.

B/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{x^2-1}-4$.

1) Déterminer le domaine de continuité de g.
2) Soit h la restriction de g à l'intervalle $[1,+\infty[$.
   a) Montrer que h est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
   b) Déterminer h $([1,+\infty[)$.
3) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une unique solution sur $[4,5]$.

Exercice 3 (5 points)



Dans le graphique ci-contre, on a représenté La courbe (C_f) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$. La droite : $\Delta : y = x$ est une asypmtote à (C_f) au voisinage de $+\infty$, la droite : $y = 1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$ l'axe des ordonnées est une asymptote à (C_f) à gauche et à droite en 0.
Utiliser la graphique pour répondre.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to0} f(x)\sin(\dfrac{1}{f(x)})$.
2) Déterminer $f(]-\infty,-1])$, $f([-1,0[)$ et $f(]0,1])$.
3) Montrer que la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{f(x)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*\setminus\{-1\}$.
4) La fonction g admet elle un prolongement par continuité en 0.