



❖ **Exercice 1 :** (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} \left(2 - \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \right)$

- 1) a) Montrer que pour tout $x > 1$, $f(x) \geq \frac{1}{x-1}$
b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- 3) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Si oui donner son prolongement .
- 4) Montrer que f continue et dérivable sur $]1, +\infty[$ puis Calculer $f'(x)$

❖ **Exercice 2 :** (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = (x + 2)\sqrt{x-1} - 2$

- 1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 .
b) Interpréter graphiquement le résultat .
- 2) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$
b) Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$
c) En déduire que les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 5$ admet chacune une unique solution .
- 3) Soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$.
a) Donner un encadrement de α à 0,25 près .
b) Démontrer que α est une solution de l'équation $x^3 + 3x^2 - 8 = 0$
c) Montrer que $\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq f'(\alpha) \leq 3$.

❖ **Exercice 3 : (5 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

Soit le nombre complexe $z = \frac{2}{1-i\sqrt{3}}$.

- 1) Ecrire z sous forme cartésienne .
- 2) a) Ecrire z sous forme trigonométrique .
b) Montrer que $z^3 + z^6 + z^9 + z^{12} = 0$
- 3) On considère le nombre complexe $z' = (1 + i)z$.
a) Ecrire z' sous forme trigonométrique .
b) En déduire la valeur exacte de $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

❖ **Exercice 4 : (5 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

- 1) Déterminer et construire l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|z - i| = |z|$
- 2) Montrer que si $|z - i| = |z|$ alors $\arg(z - i) + \arg(z) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 3) Soit A le point de E telle que $(\vec{u}, \widehat{OA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$
 - a) Construire le point A .
 - b) Déterminer l'affixe z_A du point A .
 - c) En déduire la forme trigonométrique de z_A .

Bon