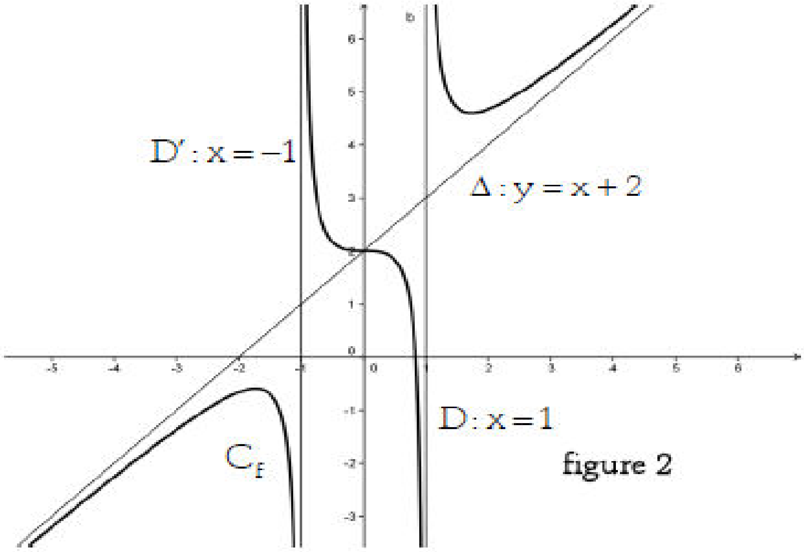
Exercice N .01(04 points)

La figure ci-dessous désigne la courbe représentative d'une fonction f ainsi que ses asymptotes.



En utilisant la figure déterminer :

1. Le domaine de définition de *f*.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x+4$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0} f\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0} f\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

Exercice N .02(06 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \in]-\infty,0[\setminus\{-1\} \\ f(x) = x+3-\sqrt{x^2+2x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$

1)a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$

2)a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty,0[\setminus\{-1\}$, $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x} \le f(x) \le \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

c) Montrer que f est continue en 0.

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{6}\right[$.

4) Soit $g(x) = f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$ pour tout $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que g est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)$

Exercice N .03(06 points)

1) Résoudre dans C l'équation : $(1+i)z^2-2z+1-i=0$

2) On considère les points A et B d'affixes respectives : 1 et $-i$.

A tout point M d'affixe z ($z\neq 1$), on associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\dfrac{3-iz}{z-1}$

a) Déterminer l'ensemble Γ des points M tels que le nombre complexe z' soit un réel.

3) Montrer que pour tout $z\neq 1$, $z'+i=\dfrac{3-i}{z-1}$

2) Montrer que pour tout point M distinct de A, $AM\times BM'=\sqrt{10}$

b) En déduire que si M appartient au cercle ζ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$

alors M' appartient à un cercle ζ' dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice N .04(04 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé$(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points

A, B et C d'affixes respectives $z_A=2e^{i\theta}$; $z_B=1+e^{i\theta}$ et $z_C=-1+e^{i\theta}$.

1-a) Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

b) Montrer que le quadrilatère $OBAC$ est un rectangle.

c) Déterminer le réel θ $]0,\pi[$ tel que $OBAC$ soit un carré.

2) Déterminer θ pour que la mesure de l'aire du rectangle $OBAC$ soit égale à 1.

Exercice N .03

Exercice N .03

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$

1)a) Montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$

b) f est elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?

2)a)Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

b)Déterminer $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$, interpréter graphiquement ce résultat .

3)a)Montrer que f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

b) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$

Vérifier que $\alpha \in]1; 2[$

c)Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{2\alpha - 1}}{\alpha}$

Soit la fonction definie sur IR^* par : $f(x) = x^3 + x + 1$ si $x \leq 0$

$$f(x) = \frac{1 + x^2 \sin(\frac{\pi}{x})}{} \quad \text{si } x \succ 0$$

1-a-Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$

b-En deduire $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

c-Montrer que f est continue en 0 .

2-a- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0]$

b-Montrer que lequation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty, 0[$ et

verifier que $-0,7 \prec \infty \prec -0,6$

3-Calculer les limites suivantes ;

$\lim_{x \to 2^-} f(\frac{1}{x-2})$ et $\lim_{x \to +\infty} f(\frac{x-1}{x^2+2})$