LYCEE EL FAOUAR-KEBELI	**DEVOIR DE CONTROLE N°1**
Niveau : 4ème année	**Durée : 2 Heures**
Section : Sciences Techniques	**Année scolaire : 2016/2017**
Epreuve : Mathématiques	**Professeur : El Fekih Nader**

Le sujet comporte quatre pages numérotées de 1/4 à 4/4

EXERCICE 1 (4,5 points)

Répondre par **Vrai (V)** ou **Faux (F)**

A- Soit p, q et r, trois nombres complexes. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on note P, Q, R les points d'affixe respective p, q, r. On suppose que ces trois points sont non alignés. Alors :

1) Si : $\left|\frac{p-q}{q-r}\right| = 1$ alors : le triangle PQR est rectangle en Q. ………..

2) Si : $\frac{p-q}{r-q}$ est imaginaire pur alors : le triangle PQR est rectangle en Q. ………..

3) Si : p – q = i(r – q) alors : le triangle PQR est rectangle en Q. ………..

4) Si : p – q = $e^{\frac{i\pi}{3}}$ (r – q) et r – p = $e^{\frac{i\pi}{3}}$ (q – p) alors : le triangle PQR est équilatéral. ………..

B- Soit $\boldsymbol{\theta} \in \left]\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$. On considère les nombres complexes z et z' définis par : $\mathbf{z = 1 - \cos\theta - i \sin\theta}$ et $\mathbf{z' = 1 + \cos\theta + i \sin\theta}$ alors :

1) $|z| = 2\sin\frac{\theta}{2}$ ………..

2) arg z ≡ $\frac{\pi - \theta}{2}$ $[2\pi]$ ………..

3) $|z'| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ ………..

4) arg z' ≡ $\frac{2\pi + \theta}{2}$ $[2\pi]$ ………..

5) $\frac{z}{z'} = -i\tan\frac{\theta}{2}$ ………..

EXERCICE 2 (4,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé **$(O,\vec{u}, \vec{v})$**.

A tout point **M** d'affixe **$z \neq -i$**, on associe le point **M'** d'affixe $z' = \frac{z+2i}{1-iz}$ et soient les points **B** et **C** d'affixes respectives **$-i$** et **$-2i$**

1) a- Vérifier que pour **$z \neq -i$** on a : $-iz' = \frac{z+2i}{z+i}$.

   b- Déduire l'ensemble des points M tels que **$z' \in \mathbb{R}$**.

2) a- Montrer que : $|z'| = \frac{CM}{BM}$.

   b- Déduire l'ensemble des points M lorsque M' varie sur le cercle trigonométrique.

3) Soit le nombre complexe : $W = \frac{z'-i}{z-i}$; $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i,i\}$.

   a- Vérifier que : **$(z-i)(1-iz) = -i(z^2+1)$**.

   b- En déduire que : **$W = \frac{-1}{z^2+1}$**

4) On pose **:** $z = e^{i\theta}$; $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

   a- Vérifier que : $W = \frac{-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$.

   b- En déduire en fonction de **θ** le module et un argument de **W**.

EXERCICE 3 (4,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé **$(O,\vec{u},\vec{v})$**. Soit le point **$B(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)$** et à tout point **M (z)** on associe **M' (z')** tel que : **$z' = (1-i)z - 1$**.

1) Déterminer l'ensemble des points M tel que : **$|z'| = 2$**.

2) Soit $\theta \in [0,\pi]$, on suppose que : $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + i\sin\theta)$.

   a- Montrer que : **$z'+1 = e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$**.

   b- Déterminer **θ** pour que : **$z'+1$** soit imaginaire pur.

3) a- Vérifier que : $z' = (1-i)(z - \frac{1+i}{2})$.

   b- En déduire que : **$\arg(z') \equiv -\frac{\pi}{4} + (\vec{u}, \overrightarrow{BM})\ [2\pi]$** .

   c- Déterminer alors l'ensemble des points **M(z)** tel que : **$z' \in \mathbb{R}^-$** .

EXERCICE 4 (8,5 points)

Les trois parties A, B et C sont indépendantes

A- Soit la fonction **f** définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \mathbf{f(x) = \frac{x+1-\cos(\pi x)}{x}} & \mathbf{si\ x < 0} \\ \mathbf{f(x) = \sqrt{x^2+1} - x} & \mathbf{si\ x \geq 0} \end{cases}$

1) a- Montrer que pour tout $\mathbf{x < 0}$; on a: $\mathbf{\frac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1}$.

b- En déduire : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{f(x)}$.

c- Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{f(x)}$.

2) Montrer que **f** est continue sur $\mathbb{R}$.

3) a- Montrer que l'équation : **f(x) = 0** admet au moins une solution : $\boldsymbol{\alpha \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[}$.

b- En déduire que : $\mathbf{\sin\ (\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha}}$.

B- Soit **G** la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$**\ {-1}** par : $\mathbf{G(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}-1}}$. Peut-on prolonger la fonction **G** par continuité en $\mathbf{x_0 = 0}$? Si oui, donner l'expression du prolongement $\mathbf{\widetilde{G}}$**.**

C- Soit la fonction **f** définie sur : **] – ∞ ; 2 [∪] 2 ; + ∞ [** par : $\mathbf{f(x) = -x + \sqrt{x^2 - 4}}$ et $\mathbf{C_f}$ sa courbe représentative.

1) Déterminer les limites de **f** en $-\infty$ et $+\infty$.

2) a- Montrer que la droite **D** d'équation : **y = – 2 x** est asymptote à $\mathbf{C_f}$.

b- Etudier la position relative de $\mathbf{C_f}$. et **D**.

3) Prouver que la courbe $\mathbf{C_f}$ admet une autre asymptote, dont on précisera l'équation.

☺ ☺ ☺*BON TRAVAIL* ☺ ☺ ☺

Nom et prénom : ……………………………………………………………………..

<u>Page annexe à remplir et à remettre avec la copie</u>

EXERCICE 1

Répondre par **Vrai(V)** ou **Faux(F)**

A- Soit p, q et r, trois nombres complexes. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on note P, Q, R les points d'affixe respective p, q, r. On suppose que ces trois points sont non alignés.

Alors :

5) Si : $\left|\frac{p-q}{q-r}\right| = 1$ alors : le triangle PQR est rectangle en Q. ………..

6) Si : $\frac{p-q}{r-q}$ est imaginaire pur alors : le triangle PQR est rectangle en Q. ………..

7) Si : p – q = i(r – q) alors : le triangle PQR est rectangle en Q. ………..

8) Si : $p - q = e^{\frac{i\pi}{3}}(r - q)$ et $r - p = e^{\frac{i\pi}{3}}(q - p)$ alors : le triangle PQR est équilatéral. ………..

9) Si : $p + e^{\frac{2i\pi}{3}} q + e^{\frac{4i\pi}{3}} r = 0$ alors : le triangle PQR est équilatéral. ………..

B- Soit $\boldsymbol{\theta} \in \left]\boldsymbol{\pi}; \frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{2}}\right]$. On considère les nombres complexes z et z' définis par : $\mathbf{z = 1 - \cos\theta - i \sin\theta}$

et $\mathbf{z' = 1 + \cos\theta + i \sin\theta}$ alors :

1) $|z| = 2\sin\frac{\theta}{2}$ ………..

2) $\arg z \equiv \frac{\pi - \theta}{2} [2\pi]$ ………..

3) $|z'| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ ………..

4) $\arg z' \equiv \frac{2\pi + \theta}{2} [2\pi]$ ………..

5) $\frac{z}{z'} = -i\tan\frac{\theta}{2}$ ………..