Mathématiques	Devoir de contrôle N° 3 :
3ème Maths : M	Durée : 2heures Coefficient : 4

Exercice N°1 : (

Exercice 1

Le but de cet exercice est de déterminer tous les entiers s et t tels que

$$18s^4 - t^4 = -1. \tag{1}$$

On admettra le résultat suivant que l'on pourra utiliser : "si a et b sont deux entiers naturels de $pgcd$ égal à 1 dont le produit est un carré d'entier, alors a et b sont des carrés d'entiers."

Pour la suite, on se fixe une solution $(s;t)$ de (1).

1. Montrer que
$$(t^2+1)(t^2-1) = 18s^4. \tag{2}$$
2. Montrer que t^2-1 et t^2+1 sont pairs.
3. Déterminer les restes possibles du carré d'un entier dans sa division euclidienne par 4. En déduire que l'entier $\frac{t^2+1}{2}$ est impair.
4. Montrer que $pgcd\left(\frac{t^2+1}{2}; t^2-1\right) = 1$ et que
$$\left(\frac{t^2+1}{2}\right)(t^2-1) = \left(3s^2\right)^2. \tag{3}$$
5. En déduire qu'il existe un entier z tel que
$$t^2 - 1 = z^2. \tag{4}$$
6. En déduire que $t = -1$ et $s = 0$ ou $t = 1$ et $s = 0$.

ice N°2 : (

Soient n et p deux entiers naturels tels que $2 \le p \le n$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n dans laquelle on effectue un tirage de p boules.

1) On suppose dans cette question que les p boules sont extraites simultanément.
   a) Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
   b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \le k \le n$. Déterminer le nombre de tirages tels que le plus grand numéro tiré est k.
   c) Déduire des questions précédentes $\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$
2) On suppose dans cette question que les tirages sont successifs et sans remise.
   a) Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
   b) Combien y-a-t-il de tirages commençant par la boule numérotée 1 ?
3) On suppose dans cette question que les tirages sont successifs et avec remise.
   a) Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
   b) Combien y-a-t-il de tirages pour lesquels le premier numéro obtenu est strictement inférieur au dernier ?
   c) Combien y-a-t-il de tirages pour lesquels exactement 2 numéros sont apparus ?

Exercice

On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$

(1) Pour qu'elle valeur de u_0 la suite (u_n) est constante

(2) On suppose maintenant que la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1} \end{cases}$.

a . Montrer que la suite (u_n) n'est pas constante.

b Montrer que la suite s_n définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire s_n en fonction de n.

c . On pose $v_n = (-1)^n u_n$ et on considère la suite t_n définie par $t_n = v_{n+1} - v_n$. Exprimer t_n en fonction de s_n.

d. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n (on pourra calculer de deux manières la somme $t_0 + t_1 + \dots + t_n$.

e. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{8^n}$.

Exercice

Soient α et β deux réels, $\alpha \geq -1$. Soit (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier $n \geq 0$ on ait

$$u_{n+1} \leq (1+\alpha)\, u_n + \beta.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq (1+\alpha)^n u_0 + \frac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha}\beta.$$

Exercice n°5

1. Montrer les résultats suivants :

$$11 | 2^{10} - 1, \quad 7 | 4^{16} - 4, \quad 7 | 999999.$$

Pour le dernier résultat on mettra 999999 sous la forme $10^n - 1$.

2. Pour tout entier n, on considère $a = n^5 - n$.
   (a) Montrer, via les congruences, que a est divisible par 2 et par 3.
   (b) Montrer que a est divisible par 5.
   (c) En déduire que a est divisible par 30.
3. Pour tout entier n, on considère $a = n^{13} - n$.
   (a) Montrer, via les congruences, que a est divisible par 2 et par 3.
   (b) A l'aide d'une factorisation, montrer que a est divisible par 13 et 7.
   (c) En déduire que a est divisible par 546.
4. On cherche les nombres premiers p tels que $p | 2^p + 5$. On se fixe donc p tel que $2^p + 5 \equiv 0 \bmod p$.
   (a) Montrer à l'aide du corollaire que $2^p + 5 \equiv 7 \bmod p$.
   (b) Conclure.
5. Soient p un nombre premier et a, b deux entiers.
   (a) A l'aide du corollaire, montrer que si $p | a + b$ alors $p | a^p + b^p$.
   (b) En déduire un diviseur de $5^1 1 + 6^1 1$ et vérifier ce résultat.
   (c) A l'aide du corollaire, déterminer une valeur de p telle que $p | 5^p + 7^p$.
   (d) Faire de même avec $11^p - 4^p$.
6. Soit $p > 2$ un nombre premier et a un entier premier à p. Montrer que

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \bmod p.$$