EXERCICE 1. (4,5)

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : deux rouges portant le numéro 1 ; deux vertes portant le numéro 2 et une boule blanche portant le numéro 3.

1) On tire simultanément trois boules de l'urne. Déterminer le nombre de tirages :
   a) Donnant trois boules de trois couleurs .
   b) Donnant la boule blanche parmi les 3 boules tirées.
   c) Une somme de numéros égale à 4.
   d) Une somme de numéros égale à 5.
   e) Une somme de numéros égale à 7 .

2) On tire maintenant les trois boules l'une après l'autre et en remettant à chaque fois la boule tirée. Déterminer le nombre de tirages contenant au moins une boule verte parmi les trois boules tirées.

Exercice N°2

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{\cos(2x)}$ et on note ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer ID_f et étudier la parité de f
2) Montrer que le point $A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ est un centre de symétrie de ζ
3) Montrer que f est périodique de période 2π
4) En déduire que les points $A_k\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,0\right)$ avec $k\in Z$ sont des centres de symétrie de ζ
5) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et que $f'(x)=\dfrac{\sin x(1+2\cos^2 x)}{\cos^2(2x)}$

Exercice n : 3

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ une suite réelle définie par $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}(U_n)^2+1} \text{ ; Pour tout } n\in IN \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n\in IN$ on a $U_n\in[0,\sqrt{2}]$
2) Soit (V_n) la suite définie sur IN par $V_n=U_n{}^2-2$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison puis exprimer V_n et U_n en fonction de n

b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n$

c) on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}({U_k}^2 + 3k^2)$ calculer S_n en fonction de n

3) soit (W_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} W_0 = 0 \\ W_{n+1} = \frac{1}{2}W_n + V_n \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

Et on pose la suite $t_n = 2^n W_n$,$\forall$ $n \in IN$

a) montrer que (t_n) est une suite arithmétique de raison $r = -4$

b) exprimer t_n puis W_n en fonction de n

c) étudier les variations de W_n pour tout $n \in IN^*$

d) calculer en fonction de n, $S'_n = \sum_{k=2}^{n-1} 2^k W_k$ puis calculer $\lim_{n\to\infty} S'_n$

Rq ($1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots.. + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$)