Lycée secondaire : Ali Bourguiba Kalâa Kbira		Année scolaire : 2010-2011
Epreuve : Mathématiques	Devoir de contrôle n° 3	Durée : 2 heures
Professeur : Maâtallah	Date : Le 13-04-2011	Classe : $3M_2$

Exercice n° 1: (7 points)

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 < 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

f est une fonction définie sur $]2, +\infty[$ et représentée par la courbe (C_f) dans l'annexe .

1) On suppose que $u_0 = \frac{1}{2}$.

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $-1 \le u_n \le 1$. Etudier la monotonie de u .

b) Représenter les quatre premiers termes de u et conjecturer sa limite .

c) On admet que $f(x) = \frac{a+bx}{ax+b}$ avec a et b deux réels . Utiliser le graphique pour déterminer a et b .

d) i) Montrer que la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{1+u_n}{1-u_n}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

ii) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n et déduire sa limite .

iii) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et déduire $S'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1-u_k}$. Déterminer n pour que $S_n = \frac{211}{54}$.

2) Discuter graphiquement suivant les valeurs de u_0 , la monotonie et la convergence de u .

Exercice n° 2: (13 points)

Soit $f(x) = \sqrt{4x^2 - 2x - 2}$ - 1. On note D_f son domaine de définition et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Montrer que $\Delta : x = \frac{1}{4}$ est un axe de symétrie de (C_f) . Déduire un domaine d'étude de f .

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat .

3) a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Montrer que $\mathcal{D} : y = 2x - \frac{5}{4}$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$. Construire (C_f) .

4) Soit la fonction g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = |f(x)| \;\; si \;\; x \in D_f \\ g(x) = 1 - \sqrt{2 + 2x - 4x^2} \quad sinon \end{cases}$.

Soit (C_g) sa courbe dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Montrer que $\Delta : x = \frac{1}{4}$ est un axe de symétrie de (C_g) et interpréter graphiquement le résultat .

b) Etudier la dérivabilité de g à gauche en 1 .

c) Dresser le tableau de variation de g sur $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. Construire (C_g) .

5) Soit $h(x) = \frac{x\sin x - x}{(f(\sin x)+1)^2}$ avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. (Γ) est sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Déterminer le domaine de définition D_h de h . Montrer que $\forall\, x \in D_h$: $h(x) = \frac{x}{4\sin x + 2}$.

b) Dresser le tableau de variation de $u(x) = 2\sin x - 2x\cos x + 1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Déduire que $u(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right[$. Déduire le signe de $u(x)$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Dresser le tableau de variation de h . Construire (Γ) .

N.B : Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et la bonne présentation de la copie .

Nom et prénom : .... *DC3* *3M2* *Annexe à rendre avec la copie*