Épreuve : Mathématiques
Durée : 2H

Devoir de contrôle n°4

3ème Sciences technique 2

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}$

et pour tout entier naturel n, on pose $w_n = u_n - 1$.

1) a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq 1$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

2) a) Calculer u_1 et u_2 et déduire que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

b) Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont – on précisera la raison q et le premier terme w_0.

c) Exprimer w_n et puis u_n en fonction de n.

3) a) Calculer, en fonction de n, la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 2

Montrer , à l'aide d'un raisonnement par récurrence, les propositions suivantes :

1) Pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 4^n$ est un multiple de 5.

2) Pour tout entier naturel $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

Exercice 3

Soit le nombre complexe $z = \left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right)$.

On pose $t = (1-i)z$.

1) a) Donner la forme algébrique de t.

b) Donner la forme trigonométrique de t.

c) En déduire la forme trigonométrique de z.

d) Déterminer alors $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2) a) Montrer que z^6 est imaginaire.

b) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels $z^n \in \mathbb{R}$

Exercice 4

Dans le plan complexe, on donne les points A et B d'affixes respectives $1-3i$ et $-2i$

Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z distincte de $-2i$ associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \dfrac{z-1+3i}{z+2i}$.

1) Interpréter géométriquement le module de z'.

2) En déduire l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.

3) Interpréter géométriquement l'argument de z'.

4) En déduire l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire.

5) a) Vérifier que $z' - 1 = \dfrac{-1+i}{z+2i}$.

b) En déduire que si M est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 1 alors son image M' appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon