Prof : BARHOUMI E.
Classes : $4^{ème}$ M & Sc
A.S. : 16-17

Tunisie - Sidi Bouzid - Lycée de Cebbala
Les oscillations mécaniques forcées

Exercice n°1 :

Un oscillateur mécanique horizontal (figure ci-contre) est constitué par un ressort de raideur $K=40N.m^{-1}$ à l'extrémité duquel est accroché un solide de masse m.

Cet oscillateur est soumis d'une part à une force de frottement $\vec{f}=-h\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du centre d'inertie G du solide et h un coefficient positif; d'autre part à une force $\vec{F}(t)=F_m\sin(\omega t)\vec{i}$ exercée par un moteur.

L'équation différentielle régissant les oscillations de l'élongation x du centre d'inertie G du solide (S) est : $m\frac{d^2x}{dt^2}+h\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$.

La solution générale de cette équation différentielle est de la forme $x(t)=X_m\sin(\omega t+\varphi_x)$.

1. La valeur maximale de l'élongation est donnée par la relation $X_m=\frac{F_m}{\sqrt{(hw)^2+(mw^2-k)^2}}$

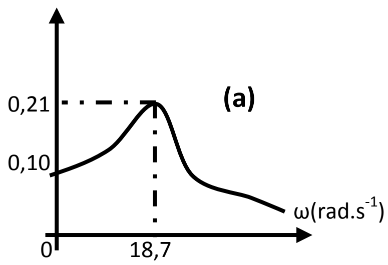
Montrer que X_m est maximale pour une valeur ω_r que l'on déterminera.

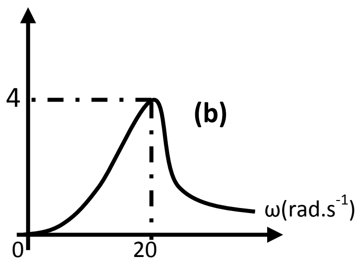
2. On mesure l'amplitude X_m pour différentes valeurs de la pulsation ω de la force excitatrice. A partir de ces mesures on a tracé les courbes (a) et (b) représentant $X_m=f(\omega)$ exprimée en mètre et $V_m=f(\omega)$ où V_m est la valeur maximale de la vitesse exprimée en $m.s^{-1}$.

a. Montrer que la courbe (a) correspond à l'évolution de $X_m=f(\omega)$.

b. Expliquer comment peut-on déduire la courbe (b) à partir de la courbe (a).

3. Déterminer graphiquement la pulsation propre ω_0, la pulsation ω_r et l'amplitude X_{m0} à la résonnance de vitesse.





4. a. Montrer que la valeur maximale de la force excitatrice est $F_m=4N$.

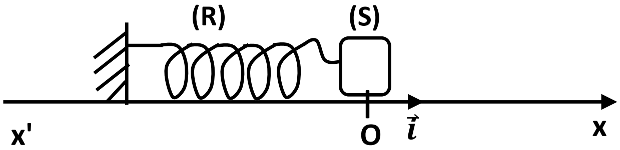
b. Déterminer les valeurs du coefficient de frottement h et la masse m du solide.

5. Exprimer la puissance moyenne absorbée par le pendule élastique en fonction de h et V_m.

Pour quelle valeur de w, la puissance moyenne est maximale ? Calculer sa valeur.

Exercice n°2:

Un pendule élastique horizontal est formé d'un solide (S) de masse m et d'un ressort (R) de raideur K. On exerce sur (S) une force excitatrice $\vec{F}=F_m\sin(\omega t)\vec{i}$ d'amplitude F_m constante égale à 2,4N et de pulsation ω réglable.



Au cours de son mouvement le solide (S) est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f}=-h\vec{v}$ où h est une constante positive et $\vec{v}$ est le vecteur vitesse instantanée.

Sachant que pour un dipôle RLC-série soumis à une tension sinusoïdale $u(t)=U_m\sin(\omega t)$ l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i(t) du courant est : $L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt=u(t)$.

La solution de cette équation est de la forme $i(t)=I_m\sin(\omega t+\varphi)$ avec $I_m=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}}$

1/ a- Retrouver, en précisant l'analogie utilisée, l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v(t) de (S) et l'expression de l'amplitude V_m de v(t).

b- La résonance de vitesse est obtenue à la pulsation $(\omega=\omega_0)$.

Donner l'expression de la pulsation ω_0 en fonction de K et m.

2/ a- Déduire, de l'expression de V_m, que l'amplitude X_m de l'élongation x(t) vérifie la relation :

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2+(m\omega^2-K)^2}}.$$

b- Montrer que le phénomène de résonnance d'élongation est obtenu pour $\omega = \omega_1$ tel que $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}}$.

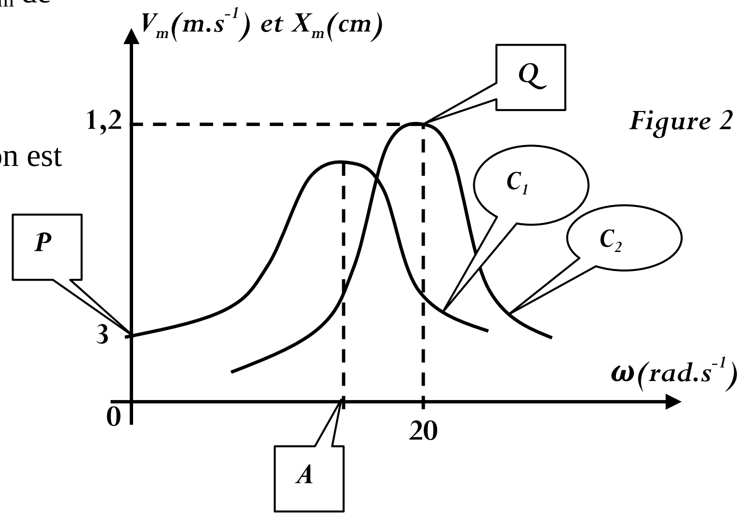


Figure 2

3/ On fait varier la pulsation ω de la force excitatrice.
Un système d'acquisition de données permet de mesurer à chaque fois les valeurs des amplitudes X_m et V_m puis tracer les courbes C_1 et C_2 de la figure 2.

a- Montrer que la courbe C_1 correspond à X_m=f(ω).

b- Donner les expressions des ordonnées des points P et Q.

c- En exploitant le graphique de la figure 2, déterminer les valeurs de ω_0, h, K, et m.

d- Déterminer la valeur de la pulsation désignée par la lettre A sur l'axe des pulsations de la figure2.

4/ L'oscillateur étant à la résonnance de vitesse.

a- Etablir les expressions numériques de F(t) et x(t).

b- Calculer l'énergie mécanique E du pendule élastique à cet état.

c- Calculer l'énergie dissipée sous forme de chaleur durant une période des oscillations.

Exercice n°3:

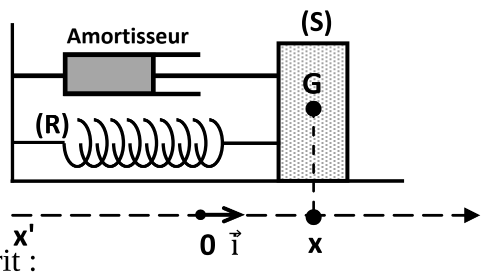
Un pendule élastique est constitué par un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G, un ressort (R) à spires non jointive, de masse négligeable et de raideur K=10N.m^{-1}.

A l'équilibre le centre d'inertie G coïncide avec le point O origine du repère $(o, \vec{i})$ de l'axe (ox).

Le solide (S) est soumis à une force de frottement visqueux, opposée au mouvement de (S), exercée par un amortisseur telle que $\vec{f} = -h\vec{v}$ avec $\vec{v}$ est la vitesse du centre d'inertie G du solide et h un coefficient positif.

Les oscillations de (S) sont entretenues par une force excitatrice $\vec{F}(t)=F_m\sin(2\pi Nt+\varphi_F)\vec{i}$ exercée par un dispositif approprié non représenter sur la figure 1.

Figure 1



1. a. Faire le bilan des forces extérieures exercées sur le solide (S).

b. Montrer que l'équation différentielle régissant les oscillations de (S) s'écrit :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + Kx = F(t)$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$x(t) = x_m \sin(2\pi Nt + \varphi_x)$.

Pour une fréquence $N=N_1$, on représente sur la figure 2 les variations en fonctions du temps de x(t) et F(t).

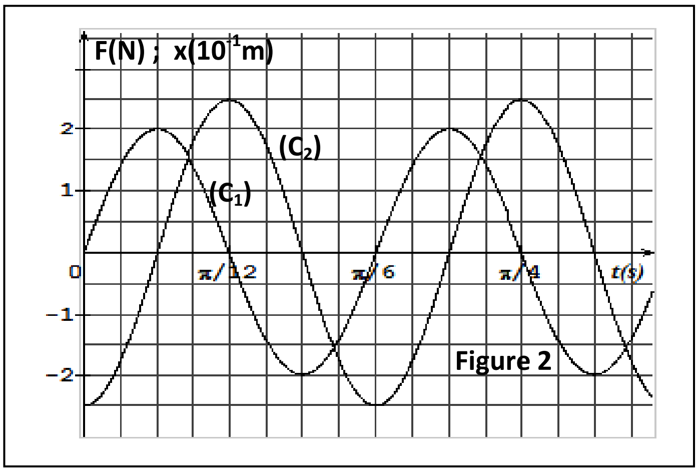


Figure 2

a. Justifier que (C_1) est la courbe qui représente l'évolution de F(t).

b. Ecrire les expressions numériques de x(t) et de F(t).

3. Montrer que le dispositif de la figure 1 est le siège d'une résonnance de vitesse.
4. a. Faire la construction de Fresnel associé à l'oscillateur mécanique de la figure 1 pour $N=N_1$.
b. En déduire les valeurs de h et m.

5. La résonnance d'élongation est obtenue à la fréquence $N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}}$
où N_0 est la fréquence propre de l'oscillateur.
a. Déterminer la valeur h_{lim} du coefficient limite de la force de frottement pour que le phénomène de résonnance d'élongation puisse se manifester.
b. En utilisant l'analogie mécanique électrique, écrire l'expression de la fréquence N_r de l'oscillateur électrique analogue et préciser son état d'oscillations à cette fréquence.

Exercice n°4 :

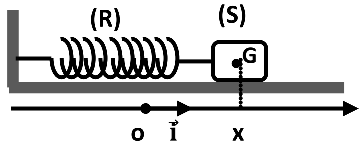


Figure 1

Le pendule élastique de la figure 1 est constitué d'un solide (S) de masse m=198g et de centre d'inertie G, attaché à l'une des extrémités d'un ressort (R) à spires non jointives, d'axe horizontal, de masse négligeable et de raideur $k=20N.m^{-1}$. L'autre extrémité du ressort est fixée à un support immobile.
A l'équilibre le centre d'inertie G du solide (S) coïncide avec l'origine O du repère $(o, \vec{i})$ de l'axe x'x. On désigne par x(t) l'abscisse de G à un instant de date t, dans le repère $(o, \vec{i})$ et par v(t) la valeur de sa vitesse à cet instant. On utilise ce pendule pour réaliser les deux expériences suivantes :
<u>Expérience n°1 :</u> On écarte le solide (S) dans le sens positif d'une distance a, puis on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant de date t=0. Le solide se met à osciller de part et d'autre du point O.
1/ a. Reproduire le schéma de la figure 1 et y représenter les forces extérieures appliquées sur (S).
b. Montrer que l'équation différentielle du mouvement de G s'écrit : $\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\, x = 0$ où α est une constante que l'on exprimera en fonction de m et k.
c. Sachant que l'équation différentielle admet une solution de la forme $x(t)=X_m\sin(2\pi N_0 t+\varphi_x)$, montrer que la fréquence propre des oscillations de G s'écrit : $N_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Calculer sa valeur.
2/ a. Exprimer l'énergie mécanique E du système {(S)+(R)} en fonction de m, k, x et v.
b. Montrer que le système {(S)+(R)} est conservatif.
c. Sachant que l'énergie mécanique E = 0,025J, déterminer la valeur de a.
3/ En exploitant les conditions initiales, déterminer la phase initiale φ_x de x(t).
<u>Expérience n°2 :</u> A l'aide d'un dispositif approprié, on applique sur (S) une force excitatrice $\vec{F}(t)=F_m\sin(2\pi Nt)\vec{i}$ d'amplitude F_m constante et de fréquence N réglable. Au cours de son mouvement, le solide (S) est soumis à une force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du centre d'inertie G du solide et h est le coefficient de frottement.
La loi horaire du mouvement du centre d'inertie G de (S) est $x(t)=X_m\sin(2\pi Nt+\varphi)$
avec $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{(2\pi Nh)^2 + (k - 4m\pi^2N^2)^2}}$.
1/ Les oscillations de G sont-elles libres où forcées. Justifier.
2/ Pour une valeur de la fréquence N_1 de la fréquence de la force excitatrice, l'amplitude X_m des oscillations de G passe par un maximum.
a. Donner le nom du phénomène dont l'oscillateur est le siège à la fréquence N_1.
b. Montrer que la fréquence N_1 est donnée par la relation : $N_1 = \sqrt{N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}}$.
3/ Une étude expérimentale a permis de tracer les deux courbes (C_1) et (C_2) de la figure 2. Elles traduisent les variations de X_m et de V_m en fonction de N; V_m étant l'amplitude de la vitesse.
a. Justifier que la courbe (C_1) représente les variations de X_m en fonction de N.
b. En exploitant les courbes de la figure 2, déterminer la valeur du coefficient de frottement h ainsi que celle de l'amplitude F_m.
c. Déterminer pour N = 1,6Hz, la valeur de la phase initiale φ de l'élongation x(t).

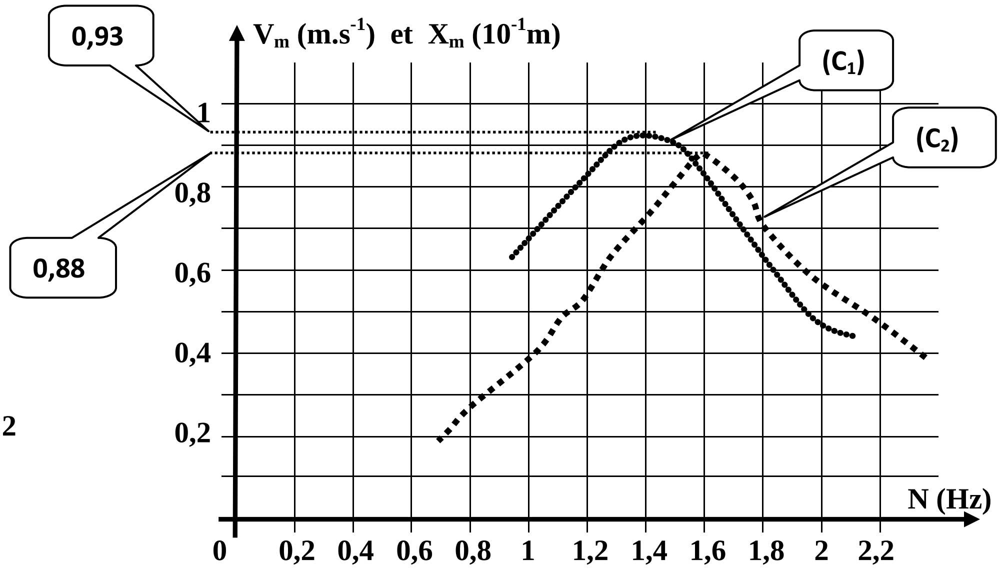


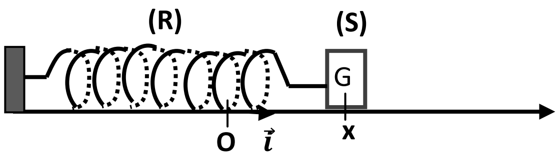
Figure 2

Exercice n°6 :

Un oscillateur mécanique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse m fixé à un ressort (R) de raideur K=40N.m^{-1}.

A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide coïncide avec l'origine O d'un repère (O, $\vec{i}$).

Figure 1



La position du solide à un instant t donnée est repérée par son abscisse x(t) dans ce repère.

Au cours de son mouvement le solide S est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f}=-h\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du centre d'inertie G du solide et h est une constante positive.

Les oscillations de (S) sont entretenues par un excitateur (non représenté) qui exerce une force $\vec{F}(t)=F_m\sin(2\pi Nt+\varphi_F)\vec{i}$ d'amplitude F_m constante et de fréquence N réglable, de façon que l'élongation $x(t)=X_m\sin(2\pi Nt+\varphi_x)$.

I°/ 1/ Représenter les forces qui s'exercent sur le solide (S).

2/ Etablir l'équation différentielle qui régit les variations de l'élongation x(t).

II°/ Pour une fréquence $N=N_1$ imposée par l'excitateur, on a représenté sur la figure 2 de la feuille annexe les variations de la force excitatrice F(t) et la tension du ressort T(t) en fonction du temps.

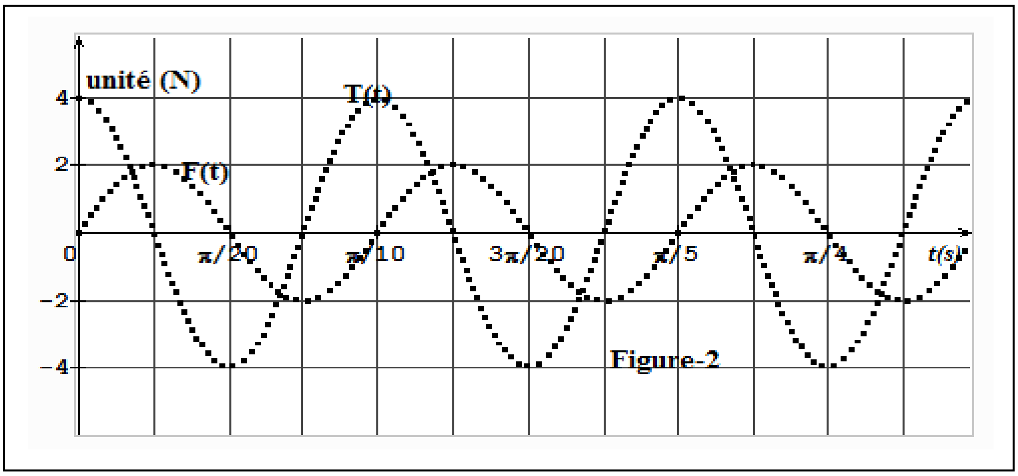


Figure-2

1/ a- En exploitant le graphe, déterminer les expressions numériques de F(t) et de T(t).

b- En déduire l'expression numérique de x(t).

2/ a- Montrer que l'oscillateur est en état de résonance de vitesse.

b- En déduire la valeur de la masse m du solide.

3/ a- Compléter la construction de Fresnel du tableau de la figure 3en utilisant l'analogie formelle électrique-mécanique.
b- Exploiter la construction de Fresnel relative à l'oscillateur mécanique pour déterminer la valeur du coefficient du frottement h.
c- Calculer la puissance mécanique moyenne P_m consommée par cet oscillateur.
d- Montrer qu'à la fréquence N_1, l'énergie mécanique E du système (solide-ressort) est constante.
III°/ On modifie la fréquence de l'excitateur, pour une fréquence $N=N_2$, on constate que l'amplitude de la tension du ressort T_m atteint sa valeur maximale.
1/ Montrer que l'oscillateur est en état de résonance d'élongation.
2/ On rappelle que l'amplitude de l'élongation : $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{4\pi^2N^2h^2+(4\pi^2N^2m-K)^2}}$.
a- Etablir l'expression de la fréquence à la résonance d'élongation N_2 en fonction de N_1, h et m.
- Calculer N_2.
b- Montrer que la résonance d'élongation ne puisse se manifester que lorsque h est supérieur à une valeur h_0 que l'on calculera.

Annexe :

Figure 1

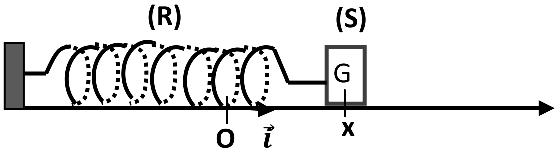


Figure 3 : Construction de Fresnel

Résonnance d'intensité	Résonnance de …………………