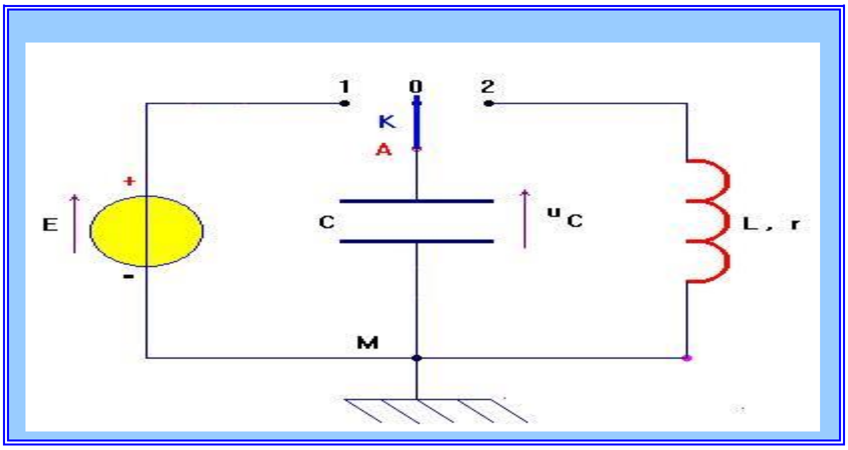
Lycée secondaire Chabbi Tataouine A.S : 2015/2016	Série n°3 Oscillateur électrique Amortie et non amortie	Prof : Ayada Noureddine Classe : 4Sc exp1

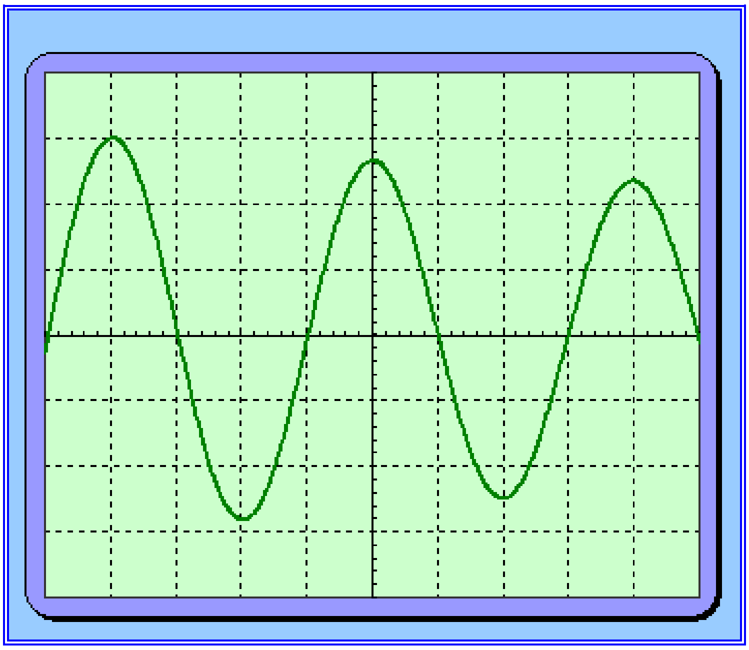
Exercice 1

On réalise le montage schématisé ci-dessous afin d'étudier la décharge d'un condensateur de capacité C = 1,0 µF dans la bobine d'inductance **L**.



1)- Représenter sur un schéma, les branchements de l'oscilloscope permettant de visualiser la tension u_C aux bornes du condensateur.

On obtient l'oscillogramme représenté ci-dessous (base de temps : 1 ms / div).



2)- Quelles positions successives doit prendre l'interrupteur ?

3)- Peut-on considérer la bobine comme idéale ? Pourquoi ?

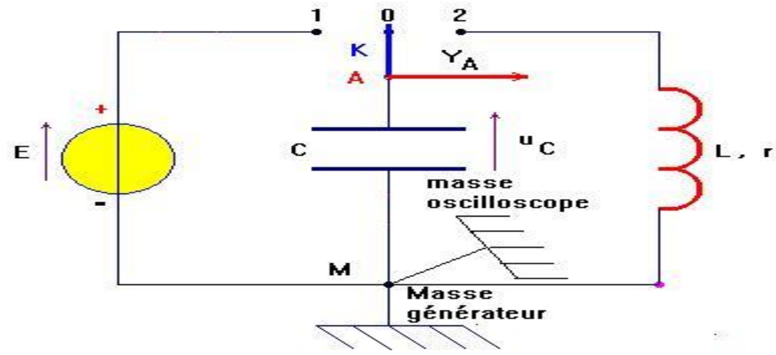
4)- Comment peut-on qualifier le régime observé ?

5)- On assimile la pseudo-période à la période propre du circuit. Déterminer la valeur de l'inductance **L** de la bobine.

6)- On place en série dans le circuit, une résistance **R** variable. Comment évolue l'oscillogramme si la valeur de R augmente ? Quels sont les régimes observés ?

Solution

1)- Branchements :



2)- Positions successives de l'interrupteur.

- Premier temps, on bascule l'interrupteur en position 1 : on charge le condensateur ***C***.

- Deuxième temps, on bascule l'interrupteur en position 2 : on décharge le condensateur dans la bobine **r**, **L**.

- On visualise la décharge grâce à l'oscilloscope à mémoire.

3)- La bobine n'est pas idéale car l'amplitude des oscillations diminue au cours du temps.

- La bobine possède une résistance r faible mais non négligeable.

4)- On observe des oscillations libres amorties. Le régime est pseudo-périodique.

5)- Valeur de l'inductance **L** de la bobine

- À l'aide de l'oscillogramme, on peut déterminer la valeur de la pseudo-période :

- $T_1 = b \cdot x$

- $T_1 = 1{,}0 \times 4{,}0$

- $T_1 \approx 4{,}0$ ms

- Les oscillations étant peu amorties :

$$T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow L \approx \frac{T^2}{4\pi^2 C}$$

$$L \approx \frac{\left(4{,}0\times 10^{-3}\right)^2}{4\times\pi^2\times\left(1{,}0\times 10^{-6}\right)}$$

- $L \approx 0{,}41$ H

6)- Si la valeur de la résistance **R** augmente et que **R** < **R** $_C$, le régime observé est pseudo-périodique et l'amplitude des oscillations diminue de plus en plus rapidement.

- Si **R** = **R** $_C$, on a atteint le régime critique.
- Si **R** > **R** $_C$, on a atteint le régime apériodique. Il n'y a plus d'oscillations.

Exercice 2

Un circuit **L C** série est constitué par un condensateur de capacité **C** = 1,0 µF, une bobine d'inductance **L** = 1,0 H et de résistance négligeable, et d'un interrupteur **K**.

Le condensateur est préalablement chargé et, l'interrupteur **K** étant ouvert, la tension aux ornes du condensateur est **u** $_C$ = 80 V. À la date **t** = 0, on ferme **K**.

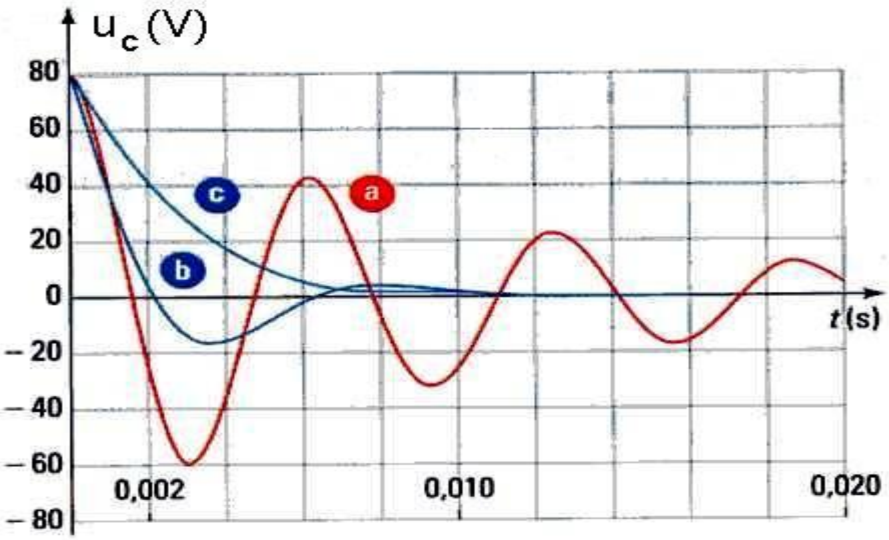
1)- Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la tension **u** $_C$ aux bornes du condensateur.

2)- La tension **u** $_C$ (t) peut se mettre sous la forme : $u_C = U\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + k\right)$. Déterminer les expressions de **U**, **T** $_0$ et **k**, puis les calculer. En déduire la valeur de la fréquence propre du circuit.

3)- On refait la même expérience, mais en intercalant un conducteur ohmique de résistance **R** variable en série dans le circuit. On se propose d'observer, avec un oscilloscope à mémoire, la variation en fonction du temps de la tension **u** $_C$ aux bornes du condensateur après la fermeture de **K** à la date **t** = 0.

a)- Représenter le circuit et les connexions avec l'oscilloscope.

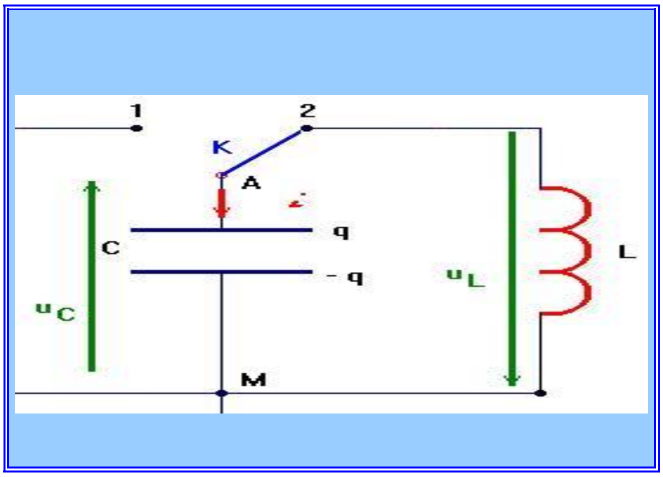
b)- On enregistre les oscillogrammes pour diverses valeurs de la résistance **R** du conducteur ohmique. Attribuer un oscillogramme à chacune des trois résistances choisies : **R** $_1$ = 2200 Ω ; **R** $_2$ = 100 Ω ; **R** $_3$ = 400 Ω. Préciser le régime des oscillations dans chaque cas.



Solution :

1)- Équation différentielle à laquelle obéit la tension **u** $_C$ aux bornes du condensateur.

- Schéma du circuit :



- L'additivité des tensions :

$$u_{AM} + u_{MA} = 0$$

$$u_C + u_L = 0 \quad \text{avec} \quad u_C = \frac{q}{C} \quad \text{et} \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$u_C + L\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad i = C\cdot\frac{du_C}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt} = C\cdot\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$LC\cdot\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}\cdot u_C = 0 \quad (1)$$

-

2)- Expression de la tension : $u_C = U\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + k\right)$

- Cette expression vérifie l'équation différentielle (1)

-
$$u_C = U\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + k\right)$$
$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0}U\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + k\right)$$
$$\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 U\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + k\right)$$
$$\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_C \quad (1')$$

- En identifiant (1) et (1') : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

- Au temps **t** = 0, le circuit est ouvert **i** (0) = 0 et **u** $_C$ = 80 V.

-
$$i = C\cdot\frac{du_C}{dt} = C\cdot\left(-\frac{2\pi}{T_0}U\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + k\right)\right)$$
$$i(0) = C\cdot\left(-\frac{2\pi}{T_0}U\sin k\right) = 0 \Rightarrow \sin k = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \text{ou} \\ k = \pi \end{cases}$$

-
$$u_C = U\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + k\right)$$
$$u_C(0) = U\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + k\right) = 80\text{ V} > 0$$
$$k = 0 \text{ et } U = E = 80\text{ V}$$

- Période propre des oscillations et fréquence propre.

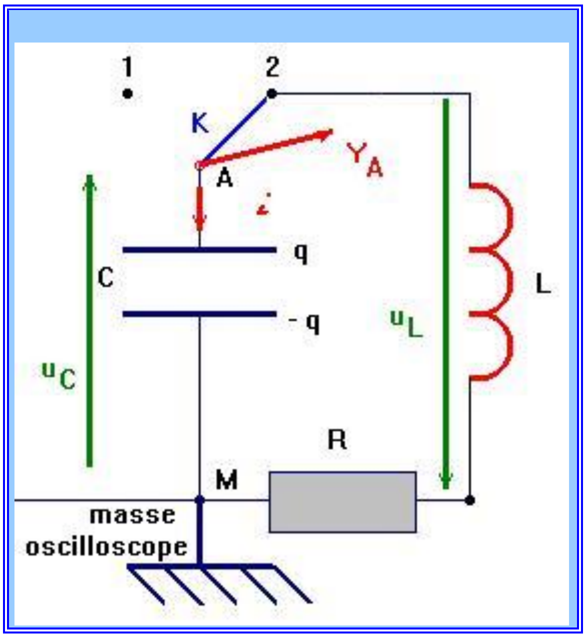
$$T_0 = 2\,\pi\sqrt{LC} \approx 2\,\pi\sqrt{1,0 \times 1,0 \times 10^{-6}}$$

$$T_0 \approx 6,28 \times 10^{-3}\ \text{s} \Rightarrow f = \frac{1}{T_0} \approx 159\ \text{Hz}$$

- $$f \approx 1,6 \times 10^{2}\ \text{Hz}$$

3)- Influence de la résistance du circuit.

a)- Schéma du circuit.

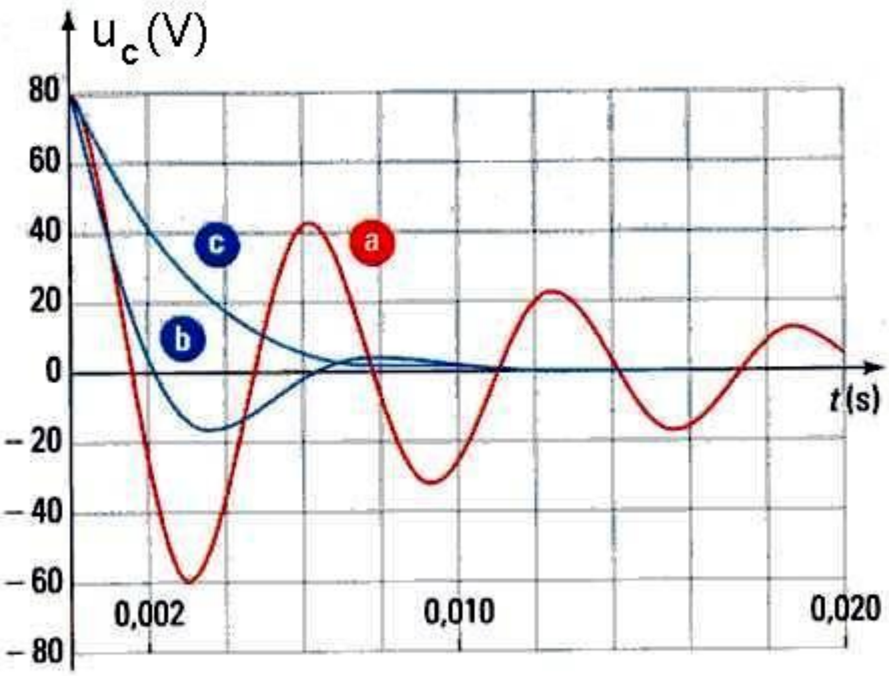


b)- Le régime des oscillations.

- Courbe a : **R** $_2$ = 100 Ω : Régime pseudo-périodique. Le système effectue des oscillations libres amorties.

- Courbe b : **R** $_3$ = 400 Ω : Régime pseudo-périodique. Le système effectue des oscillations libres très amorties.

- Courbe c : **R** $_1$ = 2200 Ω Régime apériodique. Le système n'effectue pas d'oscillation.



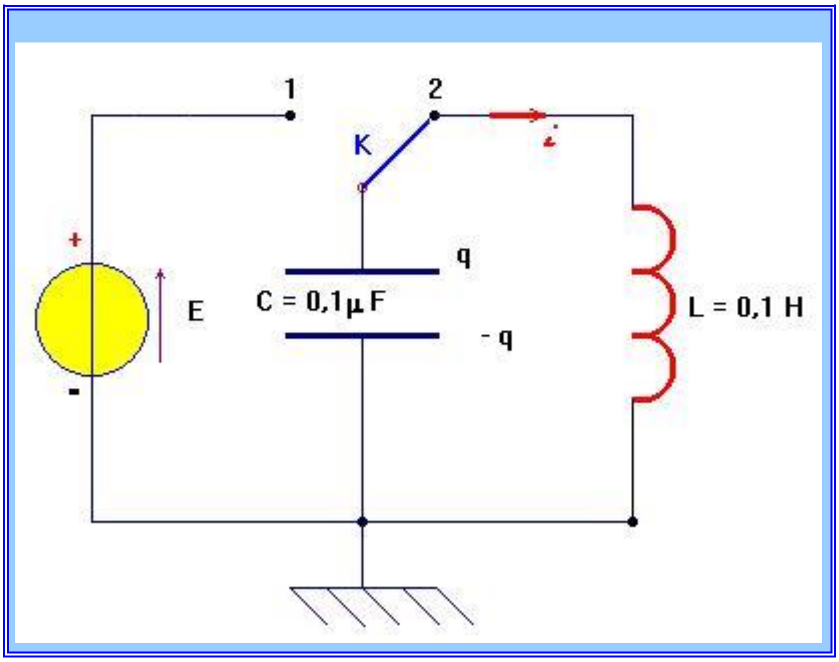
Exercice 3

On considère un circuit **LC** idéal. En plaçant un interrupteur **K** sur la position 1, on charge le condensateur sous la tension **E** = 10 V.

À l'instant t = 0, on bascule l'interrupteur sur la position 2.

Il s'établit un courant sinusoïdal **i**, pour lequel l'orientation est indiquée.

La charge du condensateur évolue au cours du temps selon : $q(t) = q_m \cos(a.t + k)$.



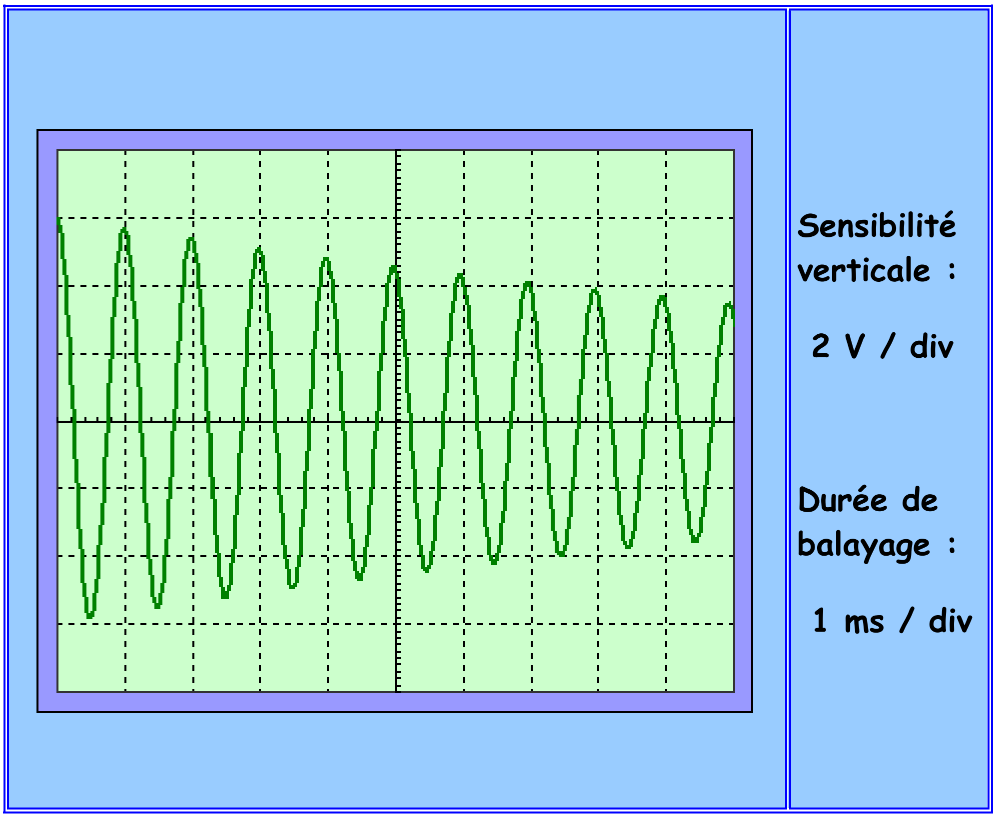
1)- À l'instant t = 0, la charge du condensateur vaut : $q_0 = 10^{-6}$ C	VRAI : $q_0 = C E \approx 10^{-6}$ C
2)- L'intensité du courant i a pour expression : $\mathbf{i} = \dfrac{\mathbf{dq}}{\mathbf{dt}}$	FAUX : avec l'orientation choisie : $\mathbf{i} = -\dfrac{\mathbf{dq}}{\mathbf{dt}}$
3)- La période des oscillations est : T ≈ 0,6 s	FAUX : $\mathbf{T} = \mathbf{T_0} = 2\,\pi\sqrt{\mathbf{LC}} \Rightarrow \mathbf{T_0} \approx 2\,\pi\sqrt{0{,}1 \times 0{,}1 \times 10^{-6}}$ $\mathbf{T_0} \approx 6{,}3 \times 10^{-4}$ s
4)- L'intensité en ampère est : $\mathbf{i(t)} = 0{,}01\,\sin\left(10^4\,\mathbf{t} + \dfrac{\pi}{2}\right)$	FAUX : On donne : **q** (**t**) = **q** $_m$ cos (**α. t** + **k**) Or $\mathbf{i} = -\dfrac{\mathbf{dq}}{\mathbf{dt}}\ ;\ \alpha = \dfrac{2\,\pi}{\mathbf{T_0}} \approx 10^4$ Les conditions initiales donnent : **t** = 0 , **i** (0) = 0 **i** (**t**) = - □ . **q** $_m$ sin (□ **t** + **k**) **i** (0) = 0 Þ sin **k** = 0 Þ { **k** = 0 ; **k** = □ Au temps **t** = 0, le condensateur est chargé et il porte la charge **q**(0) = **C E** = **q** $_0$ qui est positive. En conséquence : **q** $_m$ = **q** $_0$ et **k** = 0. $\mathbf{i} = -\alpha \cdot \mathbf{q_0}\,\sin(\alpha\mathbf{t})$ $\mathbf{i} = -0{,}01\,\sin(10^4\,\mathbf{t})$ $\mathbf{i} = 0{,}01\,\cos\left(10^4\,\mathbf{t} + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Exercice 4 : Oscillateur électrique

Un condensateur de capacité **C** = 0,25 μF est chargé à l'aide d'un générateur de tension de f.é.m. **E** = 6,0 V, puis déconnecté du générateur.

À la date **t** = 0, le condensateur chargé est relié à une bobine d'inductance **L** et de résistance **r**.

L'évolution au cours du temps de la tension u_C aux bornes du condensateur est enregistrée à l'aide d'un ordinateur (le condensateur est étudié en convention récepteur).



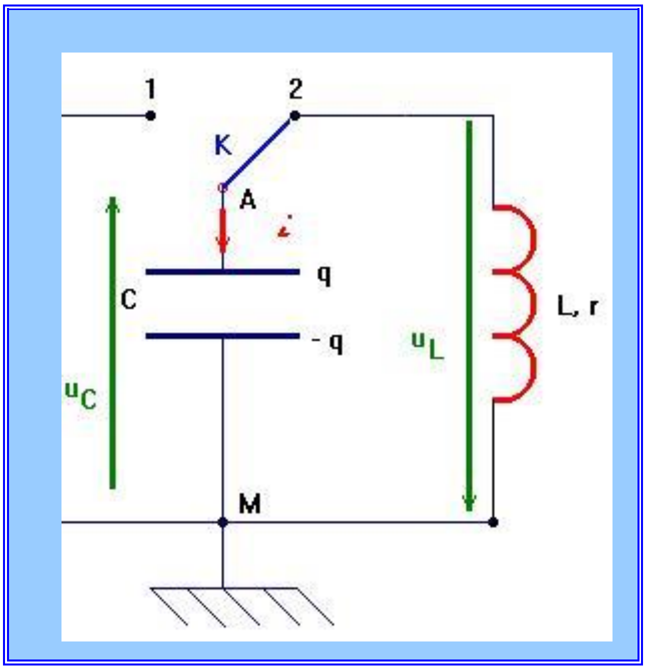
1)- Comment appelle-t-on le type d'oscillations observées ?

- On est en présence d'oscillations libres amorties. Le régime observé est pseudo-périodique.

2)- Comment interpréter la décroissance des oscillations ?

- Du fait de la présence d'une résistance dans le circuit, le système dissipe de l'énergie par effet Joule au cours des oscillations.

3)- Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait u_C.



$$u_{AM} + u_{MA} = 0$$
$$u_C + u_L = 0 \quad \text{avec} \quad u_C = \frac{q}{C} \quad \text{et} \quad i = \frac{dq}{dt}$$
$$u_C + L\frac{di}{dt} + ri = 0 \quad \text{avec} \quad i = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2}$$
$$LC \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2} + RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$
$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot u_C = 0 \quad (1)$$

-

4)- Mesurer la pseudo-période T' des oscillations.

- T' ≈ 1,0 ms.

5)- On considère que la résistance r de la bobine est nulle.

a)- Écrire la nouvelle équation différentielle satisfaite par **u** $_C$.

- Équation différentielle satisfaite par **u** $_C$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot u_C = 0 \quad (1) \quad \text{avec } r = 0$$
$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot u_C = 0 \quad (2)$$

b)- La solution de l'équation s'écrit : $u_C(t) = U \cos(\alpha t + \varphi)$. Déterminer les expressions des constantes **U**, **α** et **φ**.

- Cette solution vérifie l'équation différentielle (2) :

- $$u_C = U\cos(\alpha t + \varphi) \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = -\alpha U \sin(\alpha t + \varphi) \Rightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} = -\alpha^2 U \cos(\alpha t + \varphi)$$
$$\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\alpha^2 u_C$$

- En identifiant : $\alpha^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- Or $T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{T_0}$

- Au temps **t** = 0, le condensateur est chargé et la tension aux bornes du condensateur vaut 6,0 V. D'autre part, l'intensité **i** (0) = 0.

- $$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot \left(-\alpha U \sin(\alpha t + \varphi)\right)$$
$$i(0) = C \cdot (-\alpha U \sin\varphi) = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \end{cases}$$

- D'autre part :

- $u_C(t) = U \cos(\alpha t + \varphi)$

- $u_C(0) = U \cos(\alpha \times 0 + \varphi) = 6{,}0 \text{ V} > 0$

- $\varphi = 0$ et $U = E = 6{,}0$ V

- $$u_C = E\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

c)- En déduire l'expression de la charge **q (t)** du condensateur et de l'intensité **i (t)** à l'instant **t**.

- Expression de la charge **q** :

- $$q = C\,u_C = CE\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

- Expression de l'intensité **i** :

- $$i = C\cdot\frac{du_C}{dt} = C\cdot\left(-E\,\frac{2\pi}{T_0}\,\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t\right)\right)$$
$$i = -\frac{2\pi E C}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t\right)$$
$$i = \frac{2\pi E C}{T_0}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$i = I_m\,\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$

d)- Quelle est l'expression littérale de la période des oscillations qui prennent naissance dans le circuit ?

- Période des oscillations du circuit **L C**.

- $$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

6)- Calculer la valeur de l'inductance L de la bobine en admettant que la pseudo-période est identique à la période.

- Inductance de la bobine :

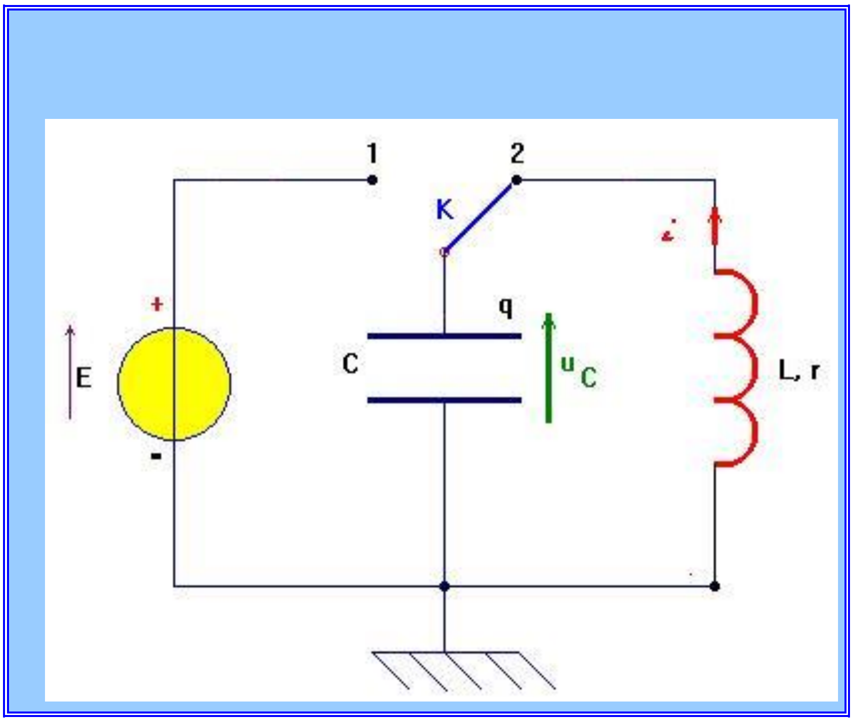
- $$T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow L \approx \frac{T^2}{4\pi^2 C}$$
$$L \approx \frac{\left(1{,}0\times10^{-3}\right)^2}{4\times\pi^2\times\left(0{,}25\times10^{-6}\right)}$$
$$L \approx 0{,}10\ \text{H}$$

Exercice 5 : Étude et modélisation d'un circuit.

On réalise le circuit schématisé ci-dessous.

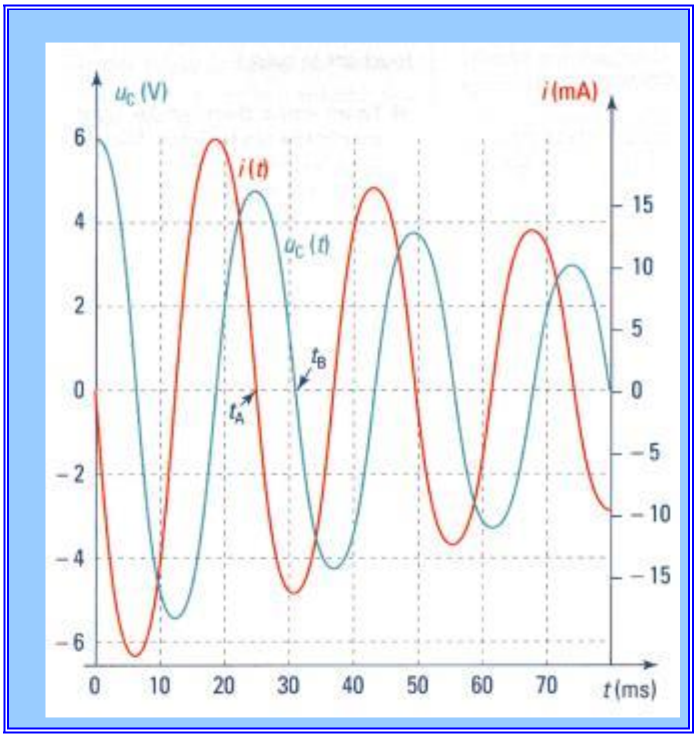
Le condensateur de capacité C = 15 µF est préalablement chargé à l'aide d'un générateur idéal de tension continue (interrupteur en position 1).

Il se décharge ensuite à travers un circuit comportant une bobine d'inductance **L** = 1,0 H et de résistance **r** (Interrupteur en position2).



I- Étude du circuit.

1)- Un dispositif d'acquisition relié à un ordinateur permet de suivre pendant la décharge, d'une part l'évolution au cours du temps de la tension par **u** $_C$ aux bornes du condensateur, et d'autre part celle de l'intensité **i** du courant.



a)- Les oscillations sont-elles libres ou entretenues ? Sans calcul, justifier la réponse.

- On est en présence d'oscillations libres amorties.

- Le circuit ne comporte pas de générateur permettant de compenser les pertes d'énergie dans le circuit par effet Joule.

- Le système possède deux réservoirs d'énergie le condensateur et la bobine.

b)- Déterminer à partir des courbes la valeur de la pseudo-période **T** des oscillations.

- Pseudo-période : graphiquement, T ≈ 24 ms

c)- Établir la relation entre l'intensité **i** du courant et la tension par u_C aux bornes du condensateur en respectant les conventions indiquées sur le schéma.

- Relations : $u_C = \dfrac{q}{C}$ et $i = \dfrac{dq}{dt} \Rightarrow i = C\dfrac{du_C}{dt}$

d)- Entre les instants t_A et t_B, le condensateur se charge-t-il ? Où se décharge-t-il ? Justifier la réponse.

- À l'instant t_A , le condensateur est chargé et l'intensité dans le circuit est nulle.

- Puis le condensateur se décharge, la tension u_C est positive et elle diminue pour s'annuler à l'instant t_B.

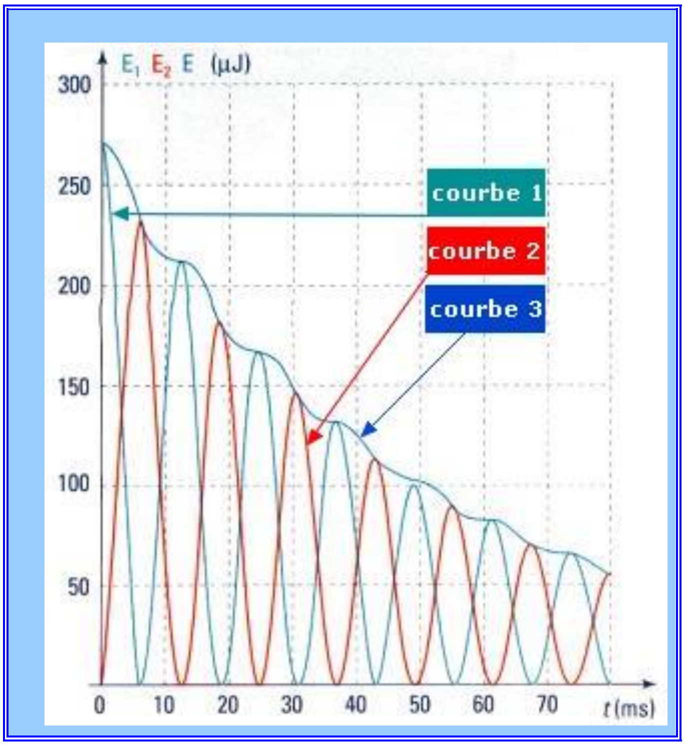
- Le condensateur se décharge.

e)- À partir de la courbe traduisant $u_C(t)$, et en utilisant la relation de la question 1)- c)-, retrouver la valeur de **i** à l'instant t_A et le sens réel de circulation du courant entre t_A et t_B.

- À l'instant t_A , la tension est maximale. Comme : $i = C\dfrac{du_C}{dt}$, l'intensité du courant qui traverse le circuit est nulle.

- Entre t_A et t_B, l'intensité est négative. Le courant circule dans le sens inverse du sens positif choisi.

2)- On souhaite étudier l'énergie totale E de l'oscillateur électrique. Cette énergie est la somme de l'énergie E_{cond} stockée dans le condensateur et de l'énergie E_{bob} emmagasinée dans la bobine. Le logiciel utilisé peut calculer, à partir des mesures, les valeurs de ces trois énergies et fournir les courbes donnant leurs variations au cours du temps.



a)- Rappeler l'expression de : l'énergie **E** $_{cond}$; de l'énergie **E** $_{bob}$.

- $$E_{cond} = \frac{1}{2} C u_C^2 \text{ et } E_{bob} = \frac{1}{2} L i^2$$

b)- L'origine des dates étant la même pour toutes les mesures, identifier les trois courbes ci-dessus en ne justifiant que l'identification de la courbe donnant les variations de **E** $_{bob}$ au cours du temps.

- La courbe 1 représente les variations de l 'énergie stockée dans le condensateur **E** $_{cond}$. Au départ, le condensateur est chargé et l'intensité dans le circuit est nulle.

- La courbe 2 représente les variations de l'énergie emmagasinée dans la bobine **E** $_{bob}$ au cours du temps.

- Il y a échange mutuelle d'énergie entre la bobine et le condensateur.

- Lorsque l'énergie stockée dans le condensateur est maximale, l'énergie emmagasinée dans la bobine est nulle et inversement.

- La courbe 3 représente les variations de l'énergie totale **E**.

c)- Interpréter brièvement la décroissance de l'énergie totale de l'oscillateur électrique.

- Le circuit comportant une résistance, au cours des oscillations, l'énergie initiale est dissipée par effet Joule.

- Il en résulte que l'énergie du système diminue au cours du temps.

II- Modélisation.

On suppose maintenant que l'oscillateur ne comporte aucune résistance. Dans ces conditions, la tension **u** $_C$ aux bornes du condensateur est de la forme : $u_C = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$.

1)- Établir l'équation différentielle vérifiée par **u** $_C$(**t**) et préciser les conditions aux limites.

- Équation différentielle : $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot u_C = 0 \quad (2)$

- Au temps **t** = 0, le condensateur est chargé et la tension aux bornes du condensateur vaut **E**. D'autre part, l'intensité **i** (0) = 0.

2)- Calculer la période **T** $_0$ et la comparer à la pseudo-période **T** déterminée au **I-** 1)- b)-.

- Période propre des oscillations :

- $$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$
$$T_0 \approx 2\pi\sqrt{1{,}0 \times 15 \times 10^{-6}}$$
$$T_0 \approx 2{,}4 \times 10^{-2}\ \text{s}$$
$$T_0 \approx 24\ \text{ms}$$

3)- Que peut-on dire des oscillations ? Comment qualifie-t-on le régime d'oscillations ?

- On est en présence d'oscillations libres non amorties. Il faut adjoindre au circuit un dipôle **D** qui compensent les pertes par effet Joule.

- Ce dispositif apportent l'énergie nécessaire à l'entretient des oscillations et au rythme propre du circuit.

4)-

a)- Établir, en fonction des grandeurs **C**, **U** $_m$, **T** $_0$ et **t** les expressions de :

- L'intensité du courant **i**(**t**) traversant le circuit électrique ;

- Sachant que :

- $$u_C = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) \text{ et que } i = C \frac{du_C}{dt}$$
$$i = -\frac{2\pi U_m C}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

- L'énergie E_{cond} stockée dans le condensateur ;

- $$E_{cond} = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2} C U_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

- L'énergie E_{bob} emmagasinée dans la bobine.

- $$E_{bob} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{2\pi U_m C}{T_0}\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

b)- Montrer que, dans ce cas, l'énergie totale de l'oscillateur est conservée.

- Énergie totale :

-
$$E = E_{cond} + E_{bob}$$
$$E = \frac{1}{2} C U_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) + \frac{1}{2} L \left(\frac{2\pi U_m C}{T_0}\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$
$$E = \frac{1}{2} C U_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) + \frac{1}{2} L C^2 U_m^2 \left(\frac{4\pi^2}{T_0^2}\right) \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) \text{ avec } \left(\frac{4\pi^2}{T_0^2}\right) = \frac{1}{LC}$$

- $$E = \frac{1}{2} C U_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) + \frac{1}{2} \frac{L C^2 U_m^2}{L C} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$
$$E = \frac{1}{2} C U_m^2 \left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)\right)$$
$$E = \frac{1}{2} C U_m^2 = c^{te}$$