Résumé : **Probabilités**
Niveau : *Bac Sciences de l'informatique*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*

Tableau récapitulatif sur le dénombrement:

Type du tirage :	Simultané	Successif sans remise	Successif avec remise
Un tirage possible :	Une combinaison	Un arrangement	Une application
L'ordre :	N'intervient pas	Intervient	Intervient
La répétition :	Sans répétition	Sans répétition	Possibilité de répétition
Nombre de tirages de p éléments parmi n éléments :	C_n^p	A_n^p	n^p

Vocabulaire :

- ✓ Une **expérience aléatoire** est une expérience qui dépend du hasard : le résultat ne peut donc être déterminé a priori.
- ✓ **L'univers** de l'expérience aléatoire est l'ensemble des issues (ou résultats) possibles de l'expérience. On le note **Ω** (appelé aussi **l'univers des cas possibles**).
- ✓ Un **évènement** est une partie de Ω. L'ensemble vide est appelé **évènement impossible**. L'univers Ω est appelé aussi **évènement certain**.
- ✓ Un singleton de Ω (ou un résultat) est appelé **évènement élémentaire** ou **éventualité**.

Soit A et B deux évènements.

- ✓ L'évènement $\boldsymbol{A \cap B}$ est l'évènement **"$\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$"**. Il est réalisé si A et B sont réalisés simultanément (au même temps).
- ✓ L'évènement $\boldsymbol{A \cup B}$ est l'évènement **"$\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{B}$"**. Il est réalisé si l'un au moins des deux évènements A et B est réalisé.
- ✓ L'ensemble $\boldsymbol{\Omega \setminus A}$, qu'on note $\boldsymbol{\overline{A}}$, est l'évènement contraire de A. Il est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.
- ✓ A et B sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser au même temps ($\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$).
- ✓ Si $A \subset B$, alors $\boldsymbol{B \setminus A}$ est l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A.
- ✓ A et B sont dits **contraires** si $\boldsymbol{A \cup B = \Omega}$ et $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$. On note $\boldsymbol{A = \overline{B}}$ ou $\boldsymbol{B = \overline{A}}$.

Définition : *"Probabilité"*

Soit Ω un univers fini et $P(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

On appelle probabilité sur Ω toute application p de $P(\Omega)$ dans $[0,1]$ telle que :

1. $p(\Omega) = 1$
2. Pour tous A et B de $P(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

⇒ Le triplet $(\Omega, P(\Omega), p)$ s'appelle **espace probabilisé fini**.

Propriétés :

Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini. A et B sont deux évènements.

1. La somme des probabilités de tous les évènements élémentaires de Ω est égale à 1.
2. La probabilité de A est la somme des probabilités des évènements élémentaires dont la réunion est A.
3. $\mathbf{0 \leq p(A) \leq 1}$.
4. $\boldsymbol{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$.
5. Si $\boldsymbol{A \subset B}$, alors $\boldsymbol{p(B \setminus A) = p(B) - p(A)}$ et $\boldsymbol{p(A) \leq p(B)}$.
6. $\boldsymbol{p(\emptyset) = 0}$.
7. $\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$.

Théorème : *"Probabilité uniforme"*

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers fini et p une probabilité sur $P(\Omega)$.

La probabilité p est dite **uniforme** ou **une équiprobabilité**, lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisés.

Dans ce cas on a :

- ✓ $\boldsymbol{p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = \cdots = p(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{card(\Omega)}}$
- ✓ Pour tout évènement A on a : $\boldsymbol{p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}}$

Définition : *"Probabilité conditionnelle"*

Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini. A et B sont deux évènements tels que $p(B) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, le réel : $\boldsymbol{p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$

On la note aussi $\boldsymbol{p_B(A)}$ et on lit :*"Probabilité de A sachant B"*

Vocabulaire :

- ✓ Deux évènements A et B sont dits **équiprobables** si $\boldsymbol{p(A) = p(B)}$.
- ✓ Deux évènements A et B sont dits **indépendants** si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre. C'est a dire $\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$.

- ✓ E étant un ensemble fini. Les parties A_1, A_3,…,A_n de E forment une **partition** de E lorsqu'elles sont deux à deux disjointes et leur réunion est E.

Conséquence :

Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini, A et B deux évènements.

- ✓ Si $p(B) \neq 0$, alors $\boldsymbol{p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A\,/\,B)}$
- ✓ Si $p(A) \neq 0$, alors $\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B\,/\,A)}$

Formule des probabilités totales :

A_1, A_3,…,A_n sont des évènement formant une partition de Ω tels que $p(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1; 2; \dots; n\}$ et B étant un évènement. Alors :

$$\boldsymbol{p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(B/A_i) \cdot p(A_i)}$$

En particulier si A es un évènement tel que $p(A) \neq 0$ et $p(\bar{A}) \neq 0$, alors :

$$\boldsymbol{p(B) = p(B/A) \cdot p(A) + p(B/\bar{A}) \cdot p(\bar{A})}$$

Formule de Bayes :

A_1, A_3,…,A_n sont des évènement formant une partition de Ω tels que $p(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1; 2; \dots; n\}$ et B étant un évènement. Alors pour tout $k \in \{1,2, \dots, n\}$ on a :

$$\boldsymbol{p(A_k/B) = \frac{p(B/A_k) \cdot p(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} p(B/A_i) \cdot p(A_i)}}$$

En particulier si A es un évènement tel que $p(A) \neq 0$ et $p(\bar{A}) \neq 0$, alors :

$$\boldsymbol{p(A\,/\,B) = \frac{p(A) \cdot p(B\,/\,A)}{p(A) \cdot p(B/A) + p(\bar{A}) \cdot p(B\,/\,\bar{A})}}$$

Définition : *"Variables aléatoires réelles discrètes"*

Une variable aléatoire réelle X définie sur un univers Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Elle est dite **discrète** si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ où $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est l'ensemble des valeurs prise par X.

Vocabulaire :

On note $p(X = x_i)$ la probabilité pour que X prenne la valeur x_i.

Définition : *"Variables aléatoires réelles discrètes"*

Une variable aléatoire réelle X définie sur un univers Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Elle est dite **discrète** si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ où $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est l'ensemble des valeurs prises par X.

Définition : *"Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle discrète"*

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un univers Ω.
L'application de $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ vers $[0,1]$ notée P_X, qui à tout x_i associe $p(X = x_i)$ est appelée **loi de probabilité de X**.

Définition : *"Fonction de répartition d'une variable aléatoire"*

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers Ω.
La **fonction de répartition** de X est l'application F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{F(x) = p(X \leq x)}$

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un univers Ω.

1. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1}$.
2. $\boldsymbol{p(X > x) = 1 - p(X \leq x)}$ pour tout réel x.
3. La fonction de répartition F de X est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$, …, $[x_i, x_{i+1}[$, $[x_n, +\infty[$.
4. Pour tous réels a et b tels que $a \leq b$ on a : $\boldsymbol{p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)}$.

Définitions :

Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini et soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

- L'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, est le réel : $\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . p(X = x_i)}$.

- La variance de X, notée $V(X)$, est le réel : $\boldsymbol{V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 . p(X = x_i)}$.

- L'écart-type de X, noté $\sigma(X)$, est le réel : $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$.

Propriétés :

X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et a est un réel.

1. $E(X+a) = E(X) + a$.
2. $E(aX) = aE(X)$.
3. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
4. $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$.
5. $V(X+a) = V(X)$.
6. $V(aX) = a^2V(X)$.
7. $\sigma(X+a) = \sigma(X)$.
8. $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$.

Définition : *"Schéma de Bernoulli – Loi binomiale"*

- On appelle **schéma de Bernoulli**, une suite d'expériences identiques telles que :

  - Chaque expérience ne donne lieu qu'a deux issues : l'une, notée S, appelée succès ; l'autre, notée, $E = \bar{S}$, appelée échec.

  - Les expériences répétées sont indépendantes les unes des autres.
- Les paramètres d'un schéma de Bernoulli sont : le nombre d'expériences n et la probabilité p de succès d'une expérience élémentaire.
- La loi de probabilité d'une variable aléatoire X qui à chaque issue de n expériences associe le nombre de succès s'appelle **loi binomiale** de paramètres n et p.

Théorème :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

1. $\boldsymbol{p(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.
2. $\boldsymbol{E(X) = np}$ et $\boldsymbol{V(X) = np(1-p)}$.

Définition : *"Variables aléatoires réelles continues"*

Une variable aléatoire réelle X définie sur un univers Ω est **continue** si $X(\Omega) = [a, b]$ où $[a, b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a < b$.

Définition : *"Densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle continue"*

Soit X une variable aléatoire réelle continue définie sur un univers Ω et prenant des valeurs sur un intervalle $[a, b]$.

On appelle **densité de probabilité** de X, la fonction f positive et continue sur $[a, b]$ telle que : $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = 1}$ et $\boldsymbol{p(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_a^b f(x)dx}$ pour tous $x_1, x_2 \in [a, b]$.

Définition : *"Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle continue"*

La **loi de probabilité** P de X est l'application qui, à tout sous intervalle $[x_1, x_2]$ de $[a, b]$ associe le réel $\boldsymbol{P([x_1, x_2]) = p(x_1 < X < x_2)}$.

Définition : *"Loi uniforme"*

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Une variable aléatoire réelle continue X suit la **loi de probabilité uniforme** sur l'intervalle $[a, b]$ si sa densité de probabilité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ x \in [a, b] \\ 0 & si\ x \notin [a, b] \end{cases}}$$

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire réelle continue qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. Alors :

1. $\boldsymbol{P([x_1, x_2]) = p(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{x_2 - 1}{b-a}}$.
2. La fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ a \leq x < b \\ 1 & si\ x \geq b \end{cases}}$$

Définition : *"Loi exponentielle"*

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Une variable aléatoire réelle continue X suit la **loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$** si sa densité de probabilité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \end{cases}}$$

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire réelle continue qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

1. Pour tous réels positifs a et b tels que $a \leq b$ on a :

$$\boldsymbol{P([a,b]) = p(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}$$

2. Pour tout réel positif a on a : $\boldsymbol{p(X \geq a) = e^{-\lambda a}}$

3. La fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ x > 0 \end{cases}}$$