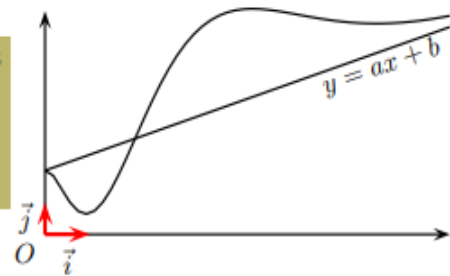


I Asymptote Oblique

On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ ($a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$) est asymptote oblique en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) à \mathcal{C}_f si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0)$$



$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

Exemple 1 :

$$x \mapsto 2x + 1 + \frac{1}{x}$$

- \mathcal{C}_f admet-elle une droite comme asymptote en $+\infty$?
- Justifier.

$$f: \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$$

Exemple 2 :

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} + 2x$$

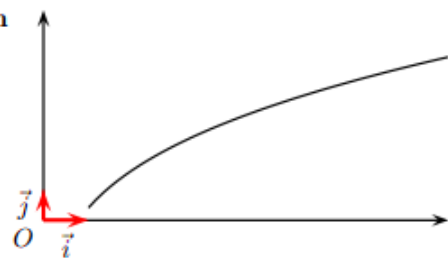
- Déterminer \mathcal{D}_f ;
- Prouver que la droite $d: y = 3x$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$;
- \mathcal{C}_f admet-elle une asymptote oblique en $-\infty$? (attendre ce qui suit pour répondre à cette question)

II Branches paraboliques

II.1 Branche parabolique de direction (Ox)

On dit que \mathcal{C}_f présente une **branche parabolique de direction asymptotique (Ox)** en $+\infty$ si :

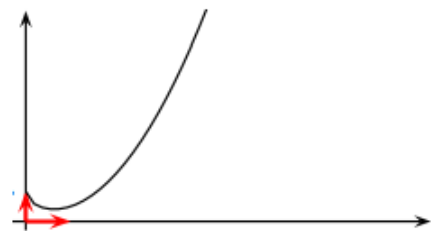
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$;



II.2 Branche parabolique de direction (Oy)

On dit que \mathcal{C}_f présente une **branche parabolique de direction asymptotique (Oy)** en $+\infty$ si :

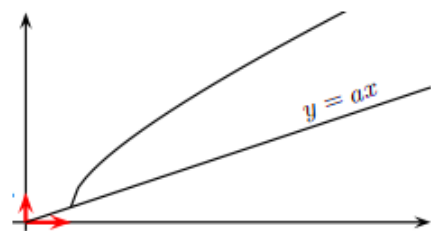
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$;



II.3 Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$

On dit que \mathcal{C}_f présente une **branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$** en $+\infty$ si :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$;



III Synthèse sur les branches infinies

III.1 Résumé

f est définie sur un intervalle ouvert ou une réunion d'intervalles ouverts

Au voisinage d'un point c ,
borne réelle de l'intervalle I .

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$$

La droite d'équation $x = c$
est asymptote verticale à C_f .

Au voisinage d'une borne infinie de l'intervalle I , par exemple $+\infty$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

La droite d'équation
 $y = l$ est asymptote
horizontale à C_f .

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$$

On poursuit les investigations ... en étudiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

→ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, branche parabolique de direction
asymptotique (Ox) ;

→ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, branche parabolique de direction
asymptotique (Oy) ;

→ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, on poursuit notre recherche ...

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$;
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, asymptote oblique d'équation $y = ax + b$;