1 Représentation géométrique d'un nombre complexe

1. Ensemble des nombres complexes

Soit i le nombre tel que $\boxed{i^2 = -1}$

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble des nombres qui s'écrivent $a + ib$ où a et b sont des nombres réels.

2. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, à tout point M de coordonnées (a, b), on associe le nombre complexe z tel que $z = a + ib$.
On dit que M est l'image du nombre complexe z et que le nombre z est l'**affixe** du point M.
De même, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est l'image de z et z est l'affixe de $\overrightarrow{OM}$.

$$\boxed{\text{L'écriture } a + ib \text{ est l'écriture algébrique du nombre complexe } z}$$

L'abscisse du point M est la partie réelle de z notée $\mathrm{Re}(z)$.
L'ordonnée du point M est la partie imaginaire de z notée $\mathrm{Im}(z)$.

Remarque : *Les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe sont des nombres réels.*

3. Conséquences

$$\begin{tikzcd}
\boxed{M(a, b) \text{ et } M'(a', b') \text{ confondus}} \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & & \boxed{a = a' \text{ et } b = b'} \arrow[dl, Leftrightarrow] \\
& \boxed{z = a + ib \text{ et } z' = a' + ib' \text{ égaux}} &
\end{tikzcd}$$

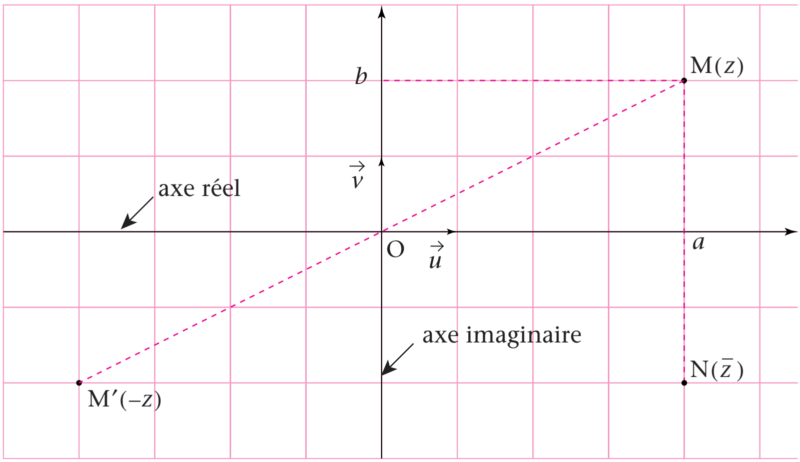
- $M = O \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $M \in (O, \vec{u}) \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

L'axe $(O, \vec{u})$ est appelé l'axe réel.

- $M \in (O, \vec{v}) \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

Dans ce cas on dit que z est un imaginaire pur et que l'axe $(O, \vec{v})$ est l'axe des imaginaires ou l'axe des imaginaires purs.

• Les points $M(a, b)$ et $M'(-a, -b)$ sont symétriques par rapport à O, leurs affixes sont opposées.
• Le point $N(a, -b)$ est l'image du nombre complexe appelé **conjugué** de z et noté $\bar{z}$.
• Les points $M(a, b)$ et $N(a, -b)$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.



Exemple d'application

1. Écrire les nombres complexes, affixes respectives des points :
A(0 ; –2) ; B(–2 ; 0) ; C(3 ; –2) ; D(3 ; 2) et E(0 ; 2).

2. Reconnaître s'il y a lieu des nombres conjugués.

Corrigé commenté

1. L'affixe du point A est $\boxed{z_A = -2\mathbf{i}}$; l'affixe du point B est $\boxed{z_B = -2}$;
celle de C est $\boxed{z_C = 3 - 2\mathbf{i}}$; celle de D est $\boxed{z_D = 3 + 2\mathbf{i}}$
et celle de E est $\boxed{z_E = 2\mathbf{i}.}$

2. $\boxed{z_A = \bar{z}_E}$ et $\boxed{z_C = \bar{z}_D.}$

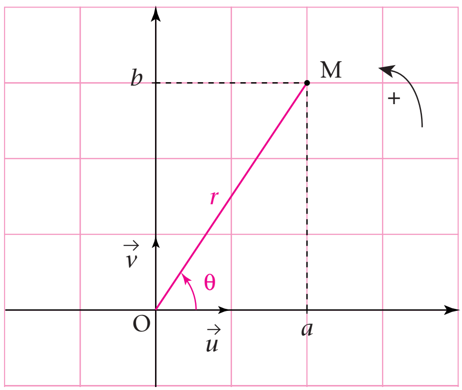
2 Formes trigonométriques

1. Formes trigonométriques

• Soit un repère $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé du plan.
Un point M distinct de O est repéré de deux façons, soit par ses **coordonnées cartésiennes** (a, b) soit par ses **coordonnées polaires** (r, θ).
• Soit M l'image du nombre complexe z tel que $z = a + \mathrm{i}b$. On pose $OM = r$ avec $r \geqslant 0$.
Le nombre positif r est appelé **module** de z et noté $|z|$.
Le nombre réel θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. Cette mesure est définie à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$ et est appelée **argument** de z et on écrit : $\arg z = \theta \quad (2\pi)$.

Remarque : La notion d'angle de vecteurs nécessite une orientation du plan (l'orientation trigonométrique est la plus souvent utilisée.)

• En projetant M sur chacun des axes, on obtient :
$\boldsymbol{a = r\cos\theta}$ et $\boldsymbol{b = r\sin\theta}$
d'où $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et d'après le théorème de Pythagore $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$
$(r = OM = \|\overrightarrow{OM}\| = |z|)$.



> Sachant que $r > 0$, on appelle forme trigonométrique du nombre complexe z l'écriture $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

2. Propriétés du module et d'un argument d'un nombre complexe

• $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$.
• $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$, quel que soit z.
• L'argument de zéro n'est pas déterminé.
• Si $z \neq 0$, $\arg(-z) = \arg z + \pi \quad (2\pi)$.
• Si $z \neq 0$, $\arg(\bar{z}) = -\arg z$.
• $z = z' \Leftrightarrow r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r'(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \quad (2\pi). \end{cases}$

3. Passage de l'écriture algébrique à une forme trigonométrique

$z = a + \mathrm{i}b$ avec $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, d'où $z = |z|\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathrm{i}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

Soit θ le nombre exprimé en radians tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \quad \text{alors} \quad z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

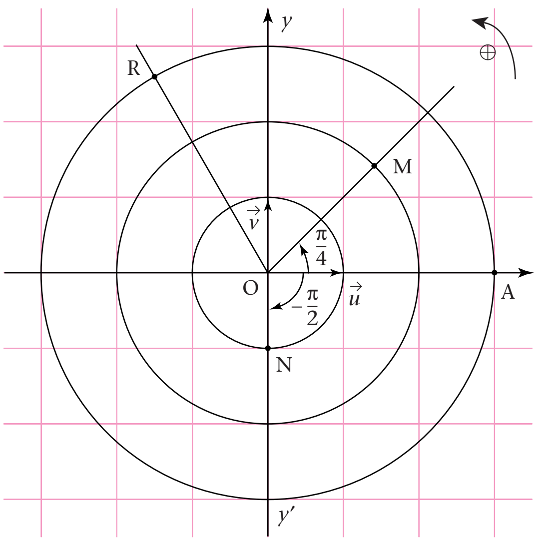
Remarque : *Il est nécessaire d'avoir en tête les sinus et cosinus des valeurs particulières des angles.*

Exemple d'application

Placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ les points M, N et R définis par $OM = 2$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$; $ON = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{ON}) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $OR = 3$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OR}) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Corrigé commenté

- *Le point* M *appartient au cercle de centre* O *et de rayon* 2 *et à la bissectrice du premier quadrant.*
- *Le point* N *appartient au cercle trigonométrique et à la demi-droite* [Oy′].
- *Sur le cercle de centre* O *et de rayon* 3, *on reporte deux fois le rayon à partir de* A(3 ; 0) *dans le sens trigonométrique, on obtient ainsi le point* R.



3 Opérations dans $\mathbb{C}$

1. Addition des nombres complexes

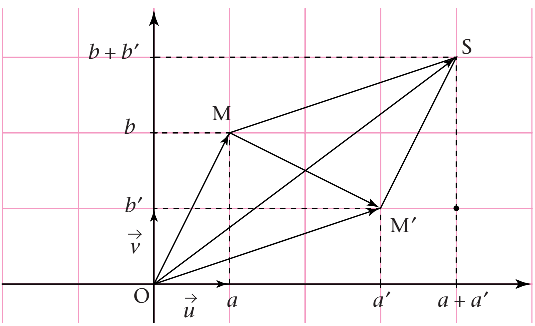
• L'addition des nombres complexes possède les mêmes propriétés que l'addition dans $\mathbb{R}$.
L'ensemble $\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$.

Tout nombre réel est un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle.

Soit les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ d'affixes respectives $a+ib$ et $a'+ib'$.

Le vecteur $(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'})$ a pour coordonnées $(a+a', b+b')$ donc si $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$, le nombre complexe $z+z'$ est tel que $\mathrm{Re}(z+z') = a+a'$ et $\mathrm{Im}(z+z') = b+b'$ d'où $\boxed{z+z' = (a+a')+i(b+b').}$

$\overrightarrow{OS}$ est l'image de $z+z'$.
$\overrightarrow{MM'}$ est l'image de $z'-z$.



• $\boxed{\overline{z+z'} = \bar{z}+\overline{z'}\ ;\quad z+\bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)\ ;\quad z-\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z).}$

2. Multiplication des nombres complexes

• La multiplication des nombres complexes possède les mêmes propriétés que la multiplication dans $\mathbb{R}$.
$zz' = (a+ib)(a'+ib') = aa'-bb'+i(ba'+ab')$.

Remarque : *ayez toujours à l'esprit que* $i^2 = -1$ *et que* i^2 *ne doit pas figurer dans un résultat ni aucune autre puissance de* i.

• $\boxed{\overline{z\cdot z'} = \bar{z}\cdot\overline{z'}\ ;\quad z\cdot\bar{z} = a^2+b^2 = |z|^2}$

Si $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ et $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, alors $zz' = rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$.

Donc : $\boxed{|zz'| = |z| \times |z'| \quad \text{et} \quad \arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad (2\pi)}$

3. Division de deux nombres complexes

La division de deux nombres complexes a les mêmes propriétés que la division dans $\mathbb{R}$.

• Tout nombre complexe non nul admet un inverse $\dfrac{1}{z}$ tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Remarque : *cette écriture algébrique s'obtient en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.*

• Si $z' \neq 0$, $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'} = \dfrac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + i\left(\dfrac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } z' \neq 0,\ \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} \text{ et } \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad (2\pi),\ \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}} \\ \text{donc, si } z \neq 0,\ \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} \text{ et } \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z \quad (2\pi). \end{array}}$$

Exemple d'application

Soit Z le nombre complexe tel que $Z = \dfrac{4-3i}{2-2i}$.

Calculer $|Z|$ et donner l'écriture algébrique de $\overline{Z}$.

Corrigé commenté

Indication : *On applique la propriété* $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

$$|Z| = \frac{|4-3i|}{|2-2i|} = \frac{\sqrt{4^2+3^2}}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{8}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \quad \text{d'où : } \boxed{|Z| = \frac{5\sqrt{2}}{4}.}$$

Indication : *On applique la propriété* $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

$$\overline{Z} = \frac{\overline{4-3i}}{\overline{2-2i}} = \frac{4+3i}{2+2i} = \frac{4+3i}{2(1+i)} = \frac{(4+3i)(1-i)}{2\times 2} \quad \text{d'où : } \boxed{\overline{Z} = \frac{7}{4} - \frac{1}{4}i.}$$

Conseil : *N'oubliez pas que* $z\overline{z} = |z|^2$ *donc que* $(1+i)(1-i)$ *s'écrit sans calcul 2.*
On pouvait aussi mettre Z sous forme algébrique et écrire ensuite $\overline{Z}$.

4 Formes exponentielles

1. Formes exponentielles

● Soit la fonction $f : \theta \mapsto \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

$f(\theta) \times f(\theta') = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$

$f(\theta) \times f(\theta') = (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + \mathrm{i}(\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta')$

$f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta')$.

Donc $\quad f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')$.

Cette relation fonctionnelle étant caractéristique des fonctions exponentielles on pose :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \sin\theta + \mathrm{i}\sin\theta}$$

Tout nombre complexe non nul z de module r est tel que $z = r(\sin\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

● L'écriture $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est une **forme exponentielle** du nombre complexe z.

Remarques :

– Cette écriture est à privilégier dans des calculs de quotients ou de puissances de nombres complexes.

– Tous les nombres complexes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ *ont pour module un et pour images des points du cercle trigonométrique.*

● De part l'introduction de l'écriture exponentielle :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}\,; \quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}\,; \quad (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\,.}$$

● Formules d'Euler :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\,; \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\,.}$$

● $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \quad (2\pi). \end{cases}$

2. Résolution d'une équation de type $z^n = a$

Si $n > 2$ avec $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$, on écrit z et a sous forme exponentielle.

Soit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $a = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

$$z^n = a \Leftrightarrow r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \alpha + k2\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

soit $\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \dfrac{\alpha}{n} + k\dfrac{2\pi}{n} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

L'équation admet alors n solutions en donnant à k, n valeurs consécutives.

Exemple d'application

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8\mathrm{i}$.
Donner les solutions sous forme algébrique.

Corrigé commenté

On pose $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

$$z^3 = 8\mathrm{i} \Leftrightarrow r^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

soit $\begin{cases} r = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Pour $k = 0$, $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i}$;

pour $k = 1$, $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$;

pour $k = 2$, $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{2}\right) = -2\mathrm{i}$.

$$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{-2\mathrm{i} \ ;\ \sqrt{3} + \mathrm{i} \ ;\ -\sqrt{3} + \mathrm{i}\}.}$$

5 Résolutions d'équations dans $\mathbb{C}$

1. Équations du premier degré

Toute équation du premier degré d'inconnue z se ramène à $az+b=0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
Cette équation a pour solution $z = -\dfrac{b}{a}$.

Remarque : *Il est souvent inutile de poser $z = x + \mathrm{i}y$ et de déterminer ensuite x et y par identification des parties réelles et imaginaires.*
Donner la solution sous une des trois formes algébrique, trigonométrique ou exponentielle.

2. Équations du second degré à coefficients réels

Toute équation du second degré d'inconnue z se ramène à $az^2+bz+c=0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Discriminant Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions	$x' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x'' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x' = x'' = -\dfrac{b}{2a}$	$x' = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $x'' = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Remarques :
- *Si $\Delta < 0$, les solutions sont des nombres complexes conjugués non réels.*
- *Veillez à ne pas introduire le nombre complexe i sous un radical.*
- *$\sqrt{-\Delta}$ existe si $\Delta < 0$, on peut aussi écrire $\sqrt{|\Delta|}$.*

3. Équations dont le degré est strictement supérieur à 2

Les méthodes de résolution sont souvent les mêmes que dans $\mathbb{R}$: il faut d'abord essayer de factoriser, voir s'il y a une identité remarquable, chercher une racine évidente.
On désire donc se ramener à des produits de facteurs du premier degré ou du second degré.

Remarque : *il faut penser que $1 = -\mathrm{i}^2$ et donc que z^2+1 est factorisable dans $\mathbb{C}$ alors qu'il ne l'est pas dans $\mathbb{R}$.*

Exemples d'application

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1-\mathrm{i})z+3 = -z+\mathrm{i}$.

Corrigé commenté

On regroupe les termes faisant intervenir z :

$(1-\mathrm{i})z+z = -3+\mathrm{i}$ soit $(2-\mathrm{i})z = -3+\mathrm{i}$

d'où $z = \dfrac{-3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{(-3+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{5} = -\dfrac{7}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$.

$$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}\right\}.}$$

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-z+1 = 0$.

Corrigé commenté

Indication : *on calcule* $\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = 1-4 = -3,\ \Delta < 0$;

on peut écrire $\Delta = 3\mathrm{i}^2$.

Indication : *on sait alors que les solutions de l'équation sont deux nombres complexes conjugués.*

Conseil : *ne pas oublier la valeur absolue.*

$$z_1 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}.}$$

6 Transformations ponctuelles

1. Transformation et application associée

Soit f une application définie par : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \mapsto f(z)$.

Le point M étant l'image de z et M′ l'image de z' tel que $z' = f(z)$, on définit dans le plan la transformation T associée à f, qui à M fait correspondre M′.

2. Transformations usuelles

Soit un repère orthonormé $(O\ ; \vec{u}, \vec{v})$ direct.

Transformation T	Éléments caractéristiques	Définitions de T avec $M' = T(M)$	Écritures complexes de T avec $M(z)$ et $M'(z')$
Translation	Un vecteur $\vec{u}$ non nul d'affixe u	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + u$
Homothétie	Un point Ω d'affixe ω et un réel $k \neq 0$	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$ ou bien $z' = kz + b$ avec $b \in \mathbb{C}$
Rotation	Un point Ω d'affixe ω et un angle de mesure θ à 2π près	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ ou bien $z' = e^{i\theta}z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$.
Symétrie d'axe réel	L'axe réel	$\begin{cases} OM = OM' \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \end{cases}$	$z' = \bar{z}$

Exemple d'application

Parmi les écritures complexes suivantes, reconnaître les transformations et donner pour chacune d'elles les éléments caractéristiques.

1. $z' = -6z + 2 - 3\mathrm{i}$.

2. $z' = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)z - 4 + 2\mathrm{i}$.

Corrigé commenté

1. ***Indication :*** *comme le coefficient de z est -6, alors la transformation associée est une homothétie de rapport -6. Pour trouver son centre, qui est le seul point invariant de la transformation, on résout « l'équation aux points fixes » c'est-à-dire celle traduisant $M' = M$ donc $z' = z$.*

Par suite $z = -6z + 2 - 3\mathrm{i}$ soit $7z = 2 - 3\mathrm{i}$,

d'où $z = \dfrac{2}{7} - \dfrac{3}{7}\mathrm{i}$.

L'homothétie est celle de rapport –6 et de centre Ω d'affixe $\dfrac{2}{7} - \dfrac{3}{7}\mathrm{i}$.

2. ***Indication :*** *comme le coefficient de z est le nombre complexe $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ dont l'écriture exponentielle est $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, alors la transformation associée à l'écriture complexe est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.*
Pour trouver son centre, on résout « l'équation aux points fixes ».

$z = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}z - 4 + 2\mathrm{i}$ soit $z\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -4 + 2\mathrm{i}$ d'où $z = \dfrac{-4 + 2\mathrm{i}}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}}$,

soit $z = \dfrac{(-4 + 2\mathrm{i})\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)}{\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{-5 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} + \mathrm{i}\dfrac{-\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$,

d'où $z = -4 - \sqrt{3} - \mathrm{i}(2\sqrt{3} + 3)$.

La rotation est celle de centre Ω d'affixe $-4 - \sqrt{3} - \mathrm{i}(2\sqrt{3} + 3)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

7 Interprétations géométriques

On se place dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

1. Interprétation géométrique d'une égalité de modules

Soit A, B et M trois points d'affixes respectives a, b et m.

• Si $|m - a| = |m - b|$, alors AM = MB ce qui signifie que le point **M appartient à la médiatrice du segment [AB].**

• Si $|m - a| = r$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, AM = r donc le point **M appartient au cercle de centre A et de rayon *r*.**

2. Interprétation géométrique du quotient de deux nombres complexes

Les points M et M′ ont pour affixes respectives z et z'.

• Soit $Z = \dfrac{z}{z'}$ avec $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

$$\arg Z = \arg z - \arg z' = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \quad (2\pi)$$

$$\arg Z = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM'}, \vec{u}) = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) \quad (2\pi).$$

Remarque : *un argument d'un quotient de deux nombres complexes non nuls est un angle de vecteurs.*

• Soit les points $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ avec $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$. Alors :

$$\boxed{\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}) \quad (2\pi)}$$

3. Figures particulières

• (ABC est un triangle rectangle et isocèle direct en B) $\Leftrightarrow \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

• (ABC est un triangle équilatéral) $\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_B| = |z_C - z_A|$.

• (ABC est un triangle équilatéral direct) $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

• (ABC est un triangle équilatéral direct) $\Leftrightarrow \arg \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\arg \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{\pi}{3}$.

• (ABCD est un parallélogramme) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$.

Exemples d'application

1 Quelle est la nature du triangle ABO sachant que les points A et B ont pour affixes respectives $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $2\mathrm{i}$?

Corrigé commenté

***Indication :** on explicite le complexe Z tel que $Z = \dfrac{z_0 - z_A}{z_B - z_A}$, puis on en détermine son module et un argument.*

$$Z = \frac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-\sqrt{3}-\mathrm{i}} = \frac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}.$$

***Indication :** les nombres complexes $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$ et $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ sont conjugués donc leurs modules sont égaux et leurs arguments opposés, donc $|Z| = 1$ soit :*

$$|z_0 - z_A| = |z_B - z_A| \Leftrightarrow \mathbf{OA = OB}.$$

$\arg(-\sqrt{3}-\mathrm{i}) = \arg\left[2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\right] = -\frac{5\pi}{6} \quad (2\pi)$,

or $\arg Z = \arg(-\sqrt{3}-\mathrm{i}) - \arg(-\sqrt{3}+\mathrm{i}) = 2\arg(-\sqrt{3}-\mathrm{i})$,

soit $\arg Z = -2\times\frac{5\pi}{6} \quad (2\pi)$ d'où $\arg Z = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$.

De plus $\arg Z = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{AO}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \arg(z_{\overrightarrow{AO}}) - \arg(z_{\overrightarrow{AB}})$

soit $\arg Z = (\vec{u}, \overrightarrow{AO}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$

d'où $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$.

Par suite **le triangle AOB est équilatéral**.

2 Soit A, B et C les points d'affixes respectives $1+2\mathrm{i}$, $-2+\mathrm{i}$ et $-1-2\mathrm{i}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Corrigé commenté

Il est souhaitable de placer les points dans un repère pour bien poser le problème.

On calcule le nombre complexe Z tel que $Z = \dfrac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}$.

$Z = \dfrac{1+2\mathrm{i}-(-2+\mathrm{i})}{-1-2\mathrm{i}-(-2+\mathrm{i})} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}} = \dfrac{(3+\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}{10}$,

d'où $z = \dfrac{10\mathrm{i}}{10} = \mathrm{i}$; on en déduit que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

De plus $|i| = 1 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \Leftrightarrow \mathrm{BA} = \mathrm{BC}$.

Le triangle ABC est donc rectangle et isocèle en B.