Matrices et systèmes :

Notion de matrice :

n et p étant deux entiers naturels non nuls.

On appelle ***matrice*** de dimension $n \times p$, un tableau de nombres réels comportant n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice.

Soit M une matrice d'ordre $n \times p$. Le coefficient situé à l'intersection de la $i^{éme}$ ligne et la $j^{éme}$colonne est noté a_{ij}. La matrice M se note aussi $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$.

$$M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \to 1^{ére}\, ligne \\ \vdots \\ \vdots \\ \to n^{éme}\, ligne \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \quad & \uparrow \\ 1^{ére} colonne & & p^{éme} colonne \end{array} & \end{array}$$

Matrices particulières :

- Une matrice comportant une seule ligne et p colonnes s'appelle matrice ligne (ou vecteur ligne) de dimension $1 \times p$. Dans ce cas, $n = 1$.

Exemple : $A = (2 \quad -3 \quad 0)$ est une matrice ligne de dimension 1×3.

- Une matrice comportant une seule colonne et n lignes s'appelle matrice colonne (ou vecteur colonne) de dimension $n \times 1$. Dans ce cas, $p = 1$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \\ -7 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de dimension 4×1.

- Une matrice comportant autant de lignes que de colonnes s'appelle une matrice carrée. Une matrice carrée a donc pour dimension $n \times n$. Dans ce cas, $n = p$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 4 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de dimension 3×3.

- Une matrice dont tous les éléments sont nuls est appelée matrice nulle.

Exemple : $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0)_{(2,2)}$

- Une matrice carrée avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs est appelée matrice identité (ou encore matrice unité). On note I_n la matrice identité d'ordre n.

Exemple : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls, exceptés ceux de la diagonale est appelée matrice diagonale.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Opérations sur les matrices :

Egalité de deux matrices :

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ deux matrices de même dimension $n \times p$.

Deux matrices sont égales si et seulement si, elles ont même dimension et leurs coefficients de mêmes indices sont égaux. Autrement dit, A et B sont égales si et seulement si $a_{ij} = b_{ij}$ (pour toute ligne i et colonne j).

Somme de matrices :

La somme de deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ de même dimension $n \times p$, notée $A + B$, est une matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ de dimension $n \times p$, avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; $\forall\, i, j$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

L'addition des matrices est commutative : $A + B = B + A$

L'addition des matrices est associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$

Soustraction de matrices :

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ deux matrices de même dimension $n \times p$.

$A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Produit d'une matrice par un réel :

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ une matrice de dimension $n \times p$ et k un réel.

$$kA = k \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \times a_{11} & k \times a_{12} & \cdots & k \times a_{1p} \\ k \times a_{21} & k \times a_{22} & & k \times a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \times a_{n1} & k \times a_{n2} & \cdots & k \times a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow -2A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & -6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Pour tous réels α et β et pour toutes matrices A et B de même dimension, les propriétés de linéarité suivantes sont respectées :

$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$

$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$

$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$

Produit de deux matrices :

Le produit de deux matrices ne peut se définir que si le nombre de colonnes de la première matrice est le même que le nombre de lignes de la deuxième matrice.

Soit A une matrice de dimension $n \times p$ et soit une matrice B de dimension $p \times m$. On appelle produit matriciel $A \times B$,la matrice de dimension $n \times m$ où chaque coefficient x_{ij} est le produit de la $i^{éme}$ ligne de A par la $j^{éme}$ colonne de B .

Exemples :

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2\times 2 + 1 \times 1 & 2 \times 0 + 1 \times 1 & 2 \times 3 + 1 \times 1 \\ 0 \times 2 + (-1) \times 1 & 0 \times 0 + (-1) \times 1 & 0 \times 3 + (-1) \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En général, la multiplication des matrices n'est pas commutative , c'est-à-dire $A \times B \neq B \times A$.

La multiplication de matrices est associative :

$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C.$ (Dans les cas où le produit est possible).

La multiplication des matrices est distributive par rapport à l'addition :

$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (Dans les cas où le produit est possible).

Déterminant d'une matrice carrée :

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 :

Soit M la matrice suivante $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2. On appelle déterminant de la matrice M le réel noté $dét(M)$, et défini par $dét(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 :

Soit M la matrice suivante $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ d'ordre 3. On appelle déterminant de la matrice M le réel noté $dét(M)$, et défini par :

$$dét(M) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Inverse d'une matrice carrée :

Soit M une matrice carrée d'ordre n . On dit que M est inversible si et seulement s'il existe une matrice M' de même ordre n vérifiant $M \times M' = M' \times M = I_n$ où I_n est la matrice unité d'ordre n.

Dans ce cas, M' est appelé l'inverse de M, noté M^{-1} : $M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I_n$.

Si M est inversible, sa matrice inverse est unique.

M est inversible si et seulement si $dét(M) \neq 0$.

Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 :

Soit M la matrice suivante $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2 telle que $dét(M) \neq 0$.

L'inverse de M est la matrice $M^{-1} = \frac{1}{dét(M)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Inverse d'une matrice carrée d'ordre 3 :

Soit M une matrice d'ordre 3 tel que $dét(M) \neq 0$.

L'inverse de M est la matrice $M^{-1} = \frac{1}{dét(M)}\, t_{com(A)}$.

Ecriture matricielle d'un système linéaire:

Soit M une matrice carrée d'ordre 2 ou 3 telle que $dét(M) \neq 0$.

Tout système qui s'écrit sous la forme : $MX = B$, a une seule solution $X = M^{-1}B$ avec M^{-1} la matrice inverse de M.