

Résumé : *Continuité et limites*
 Niveau : *Bac sciences expérimentales*
 Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
 Email : *saberbjd2003@yahoo.fr*

Théorème :

- Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .
- Si f est continue en a , alors les fonctions αf ($\alpha \in \mathbb{R}$), $|f|$ et f^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues en a .
 - Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues en a .
 - Si f et g sont continues en a , alors les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont continues en a .
 - Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a .
 - Si f est positive sur I et f est continue en a , alors la fonction \sqrt{f} est continue en a .

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I et soit g une fonction définie sur l'intervalle I .
 Si g est continue en a et si $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en un réel a de I et admettant une limite finie l en a .
 Alors la fonction g définie sur I par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$ est continue en a .

Limite d'une somme :

f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f + g$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

Limite d'un produit :

f a pour limite	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$f \times g$ a pour limite	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I

Limite d'un quotient :

f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
g a pour limite	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$\pm\infty$
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	F.I

f a pour limite	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
g a pour limite	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limite d'une valeur absolue et d'une racine carrée :

f a pour limite	l	$+\infty$	$-\infty$
$ f $ a pour limite	$ l $	$+\infty$	$+\infty$
$\sqrt{ f }$ a pour limite	$\sqrt{ l }$	$+\infty$	$+\infty$

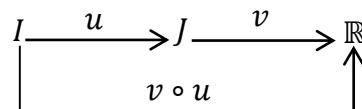
Théorème :

- La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la même que celle de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré.

Définition : "Fonction composée"

Soient u et v deux fonctions définies respectivement sur deux intervalles I et J telles que $u(I) \subset J$.

La fonction composée de u par v , notée $v \circ u$ et on lit : " v rond u ", est la fonction définie sur I par : $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.



Théorème :

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel x_0 et v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $u(x_0)$.

Si u est continue en x_0 et v est continue en $u(x_0)$, alors $v \circ u$ est continue en x_0 .

Corollaire :

La composée de deux fonctions continues est une fonction continue.

Théorème :

Soit u et v deux fonctions.

Soit a, b et c finis ou infinis.

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} v \circ u(x) = c$.

Théorème :

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut-être en un réel x_0 de I .

- Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.
- Si $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Les résultats énoncés ci-dessus restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en x_0 ou à gauche en x_0 .

Théorème :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

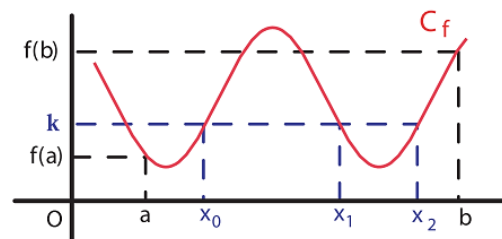
Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I .

Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.

En particulier, si $f(a) \cdot f(b) < 0$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.



Théorème :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a, b]$.

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

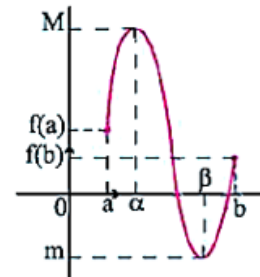
Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I .

Théorème :

L'image d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ par une fonction continue f est un intervalle fermé borné $[m, M]$.

Le réel m est le minimum de f sur $[a, b]$.

Le réel M est le maximum de f sur $[a, b]$.



Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a, b[$ (b fini ou infini).

- Si f est croissante et majorée alors elle possède une limite finie en b .
- Si f est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$ en b .
- Si f est décroissante et minorée alors elle possède une limite finie en b .
- Si f est décroissante et non minorée alors elle tend vers $-\infty$ en b .

Théorème :

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et strictement monotone sur I est un intervalle de même nature.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

a et b sont deux réels tels que $a < b$.

I	Si f est strictement croissante sur I	Si f est strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$	$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$f([a, b[) = \left[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$f([a, b[) = \left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a) \right]$
$]a, b]$	$f(]a, b]) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b) \right]$	$f(]a, b]) = \left[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a, b[$	$f(]a, b[) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$f(]a, b[) = \left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$[a, +\infty[$	$f([a, +\infty[) = \left[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$f([a, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a) \right]$
$]a, +\infty[$	$f(]a, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$f(]a, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$] -\infty, b]$	$f(] -\infty, b]) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(b) \right]$	$f(] -\infty, b]) = \left[f(b), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$] -\infty, b[$	$f(] -\infty, b[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$f(] -\infty, b[) = \left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$] -\infty, +\infty[$	$f(] -\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$f(] -\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$