1) Produit scalaire :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
- $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'+zz'$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- $M(x,y,z);M'(x',y',z')$ $\quad \overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\\z'-z\end{pmatrix}$; $MM' = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$
- I milieu du segment [MM'] alors : $I\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$.

2) Produit vectoriel :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = 0$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ est une base directe.
- $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = AB.AC.\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
- $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}yz'-zy'\\ -(xz'-zx')\\ xy'-yx'\end{pmatrix}$.
- $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$

$$\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\vec{w} = \left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right).\vec{u} = \left(\vec{w}\wedge\vec{u}\right).\vec{v} = \det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right) = \begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix} = x\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix} - y\begin{vmatrix}x' & x''\\ z' & z''\end{vmatrix} + z\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}$$

- L'aire du parallélogramme ABCD $= \left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$.
- L'aire du triangle ABD $= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$.
- Volume du tétraèdre ABCD $= \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BA}\right| = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$.
- Volume du parallélépipède ABCDEFGH $= \left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right|$

3) Droites dans l'espace :

- $D(A,\vec{u}) = \{M(x,y,z) / \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}\ ;\ \alpha \in IR\}$.
- Si $A(x_0,y_0,z_0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $D: \begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \\ z = z_0 + \alpha c \end{cases}$; $\alpha \in IR$ D : représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
- $d(M,D) = \dfrac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$: distance du point M à la droite D.
- **Position de deux droites.**
  Soit D et D' deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
  - Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** alors D et D' sont **parallèles.**
  - Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas **colinéaires** alors D et D' sont **sécants ou non coplanaires.**

4) Plans dans l'espace :

- $P_{(A,\vec{u},\vec{v})} = \{M(x,y,z) / \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0\}$: plan passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- L'équation $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$ donne l'équation cartésienne du plan P qui est de la forme **ax + by + cz +d=0**.
- $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal de P.
- $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal du plan (ABC).

Position de deux plans :

Soit $P: ax+by+cz+d=0$ et $P': a'x+b'y+c'z+d'=0$

$\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P et $\overrightarrow{n_{P'}}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P'.

- Si $\overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_{P'}}$ sont colinéaires alors P et P' sont **parallèles.**
- Si $\overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_{P'}}$ sont orthogonaux alors P et P' sont **orthogonaux.**
- Si $\overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_{P'}}$ ne sont pas colinéaires alors P et P' sont **sécants.**

Position d'une droite et d'un plan :

$\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan P et $\vec{u}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur d'une droite D passant par $A(x_0,y_0,z_0)$

- Si $\overrightarrow{n_P}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires alors $P \perp D$.

Remarque : Si P $\perp$ D alors $\vec{u}$ est un vecteur normal du plan P.

- Si $\overrightarrow{n_P}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux alors P // D .
- Si $\overrightarrow{n_P}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires alors P et D sont sécants en un point $H(x_1, y_1, z_1)$.

$$\{H\} = P \cap D \Leftrightarrow ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \text{ et } D: \begin{cases} x_1 = x_0 + \alpha a' \\ y_1 = y_0 + \alpha b' \\ z_1 = z_0 + \alpha c' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$H\left(x_0 - a'\left(\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{aa' + bb' + cc'}\right); y_0 - b'\left(\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{aa' + bb' + cc'}\right); z_0 - c'\left(\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{aa' + bb' + cc'}\right)\right)$$

Plan médiateur :

Soit P : $ax + by + cz + d = 0$

Déterminer l'équation cartésienne de plan médiateur P du segment [IJ].

- $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{IJ}$.
- Pour chercher **d**, soit M milieu de [IJ] $\Leftrightarrow$ M $\in$ P .

5) Sphère :

$S_{(A,R)} = \{M(x, y, z) / AM = R\}$: Sphère de centre $A(x_0, y_0, z_0)$ et de rayon R d'équation :

$S : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

Soit P : $ax + by + cz + d = 0$; $d(A, P) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Position d'une sphère et d'un plan

- Si d > R alors $S \cap P = \phi$.
- Si d < R alors $S \cap P = \zeta_{(H,r)} : r = \sqrt{R^2 - d^2}$ et H est le projeté orthogonal de point A sur le plan P.
- Si d = R alors S et P sont tangents en un point M qui est aussi le projeté orthogonal de A sur P .

Application :

Ecrire l'équation du plan tangent à la sphère S d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ en un point $A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$