I. Racines carrées d'un nombre complexe

Définition

Soit $Z \in \mathbb{C}$, on appelle racine carrée de Z tout nombre complexe z vérifiant : $z^2 = Z$.

Cas particulier

Si Z = 0 alors ($z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$) donc 0 est l'unique racine carrée de 0.

Exemple

Trouver les racines carrées de i, revient à résoudre l'équation $z^2 = i$.

Méthode algébrique

On pose $z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$z^2 = i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = i \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \text{ or } |z^2| = |i| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ ou } (x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Ainsi $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les deux racines carrées de i.

Méthode trigonométrique

On pose $z = [r, \alpha] = r e^{i\alpha} \Rightarrow z^2 = [r^2, 2\alpha] = r^2 e^{2i\alpha}$

$z^2 = i \Leftrightarrow r^2 e^{2i\alpha} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Théorème

Tout nombre complexe non nul $Z = [r, \theta]$ admet exactement deux racines carrées opposées l'une de l'autre qui sont $z_1 = \left[\sqrt{r}, \frac{\theta}{2}\right]$ et $z_2 = \left[\sqrt{r}, \pi + \frac{\theta}{2}\right]$

Exercice

Déterminer les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

$Z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $Z_2 = 3 + 4i$

Exercice 5 page 31.

II. Equation du second degré

Théorème

Soit l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$; $z \in \mathbb{C}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

(E) admet toujours deux solutions (distinctes ou confondues) $z' = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z'' = \frac{-b+\delta}{2a}$

Où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarques

- $z' = z'' \Leftrightarrow \Delta = 0$.
- $z' + z'' = -\frac{b}{a}$ et $z' \times z'' = \frac{c}{a}$
- $z = 1$ est une solution de (E) : $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$
- $z = -1$ est une solution de (E) : $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a - b + c = 0$
- $\Delta' = b'^2 - ac$, avec $b' = \frac{b}{2}$ est le discriminant réduit

  $z' = \frac{-b'-\delta'}{a}$ et $z'' = \frac{-b'+\delta'}{a}$ où δ' est une racine carrée de Δ'.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $iz^2 - (7 + 2i)z + 14 = 0$

Exercices 6, 7, 8, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 pages 31, 32 et 33.

III. Equations de degré supérieur à 2

Propriété

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ un polynome complexe de degré n.

Si α est une solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $P(z) = (z - \alpha)\times Q(z)$

Où $Q(z)$ est un polynome complexe de degré $n - 1$.

Exemple (equation de troisième dgré)

Soit $P(z) = z^3 - (5 + i)z^2 + 4(2 - i)z - 12 + 4i$.

- Vérifier que $P(-2i) = 0$
- Factoriser $P(z)$
- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 13 page 31.

IV. Racines nièmes d'un nombre complexe

Définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $Z \in \mathbb{C}$, on appelle racine nième du nombre complexe Z, tout nombre complexe z vérifiant : $z^n = Z$.

Remarques

- Si Z = 0 alors ($z^n = 0 \Leftrightarrow z = 0$) $\Rightarrow$ 0 est l'unique racine nième de 0.
- Si $Z \in \mathbb{C}^*$ alors $Z = [\rho, \theta]$

  Z admet exactement n racines nièmes distinctes $z_k = \left[\sqrt[n]{\rho}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right]$, $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$

Exemples

- Déterminer les racines quatrièmes de $Z = -8 + 8i\sqrt{3}$. Représenter les points images des solutions dans $P\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$
- Déterminer les racines cubiques de l'unité

Remarques

Soit $Z = [\rho, \theta]$, $n \geq 2$ et $z_k = \left[\sqrt[n]{\rho}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right]$, $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$

- $OM_k = \sqrt[n]{\rho} \Leftrightarrow M_k \in \zeta_{(O,\ \sqrt[n]{\rho}\ )}$
- $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}}\right) \equiv \frac{2\pi}{n}[2\pi]$

  Ainsi : les points images respectifs des n racines nièmes d'un nombre complexe non nul Z = $[\rho, \theta]$ sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle $\zeta_{(O,\ \sqrt[n]{\rho}\ )}$

- La somme des n racines nièmes de l'unité est nulle : $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$
- On obtient toutes les racines nièmes d'un nombre complexe non nul en multipliant l'une d'elles succéssivement par les racines nièmes de l'unité.

Exercice

Calculer $(2 + i)^3$. En déduire les racines cubiques de Z = 2 + 11i.

Exercice 24 page 33.