

I. Rappels

$I = [n_0, +\infty[$ désigne un intervalle de \mathbb{N} ; ($n_0 \in \mathbb{N}$) ; c'est à dire $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$.

Suite arithmétique de raison r

* $U = (U_n)_{n \in I}$ est une suite arithmétique si et seulement si : il existe un réel fixe r tel que :

$$\forall n \in I; U_{n+1} = U_n + r$$

* $U = (U_n)_{n \in I}$ étant une suite arithmétique de raison r, alors :

$$\forall (n, m) \in I^2; \text{ on a : } U_n = U_m + (n - m)r$$

Si $m = 0$, alors : $\forall n \in I; U_n = U_0 + nr$

Si $m = 1$, alors : $\forall n \in I; U_n = U_1 + (n - 1) \cdot r$

Si $m = 2$, alors : $\forall n \in I; U_n = U_2 + (n - 2) \cdot r$

* Soit $S = U_p + U_{p+1} + \dots + U_k$.

S est la somme de n termes consécutifs de la suite arithmétique U ; ($n = k - p + 1$)

$$S = \frac{n}{2}(U_p + U_k) = \frac{n}{2}[2U_p + (k - p)r]$$

$$S = \frac{\text{Nombre de termes de S}}{2} (\text{1er terme de S} + \text{dernier terme de S})$$

Exemples :

$$S = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$$

$$= \frac{n+1}{2}(2U_0 + nr)$$

$$S = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

$$= \frac{n}{2}(2U_1 + (n-1) \cdot r)$$

* a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique $\Leftrightarrow 2b = a + c$

Suite géométrique de raison q

* $V = (V_n)_{n \in I}$ est une suite géométrique si et seulement si : il existe un réel fixe q tel que :

$$\forall n \in I; V_{n+1} = q \times V_n$$

* $V = (V_n)_{n \in I}$ étant une suite géométrique de raison $q \neq 0$, alors :

$$\forall (n, m) \in I^2; \text{ on a : } V_n = V_m \times q^{n-m}$$

Si $m = 0$, alors : $\forall n \in I; V_n = V_0 \times q^n$

Si $m = 1$, alors : $\forall n \in I; V_n = V_1 \times q^{n-1}$

Si $m = 2$, alors : $\forall n \in I; V_n = V_2 \times q^{n-2}$

* Soit $S = V_p + V_{p+1} + \dots + V_k$

S est la somme de n termes consécutifs de la suite géométrique V ; ($n = k - p + 1$)

Si $q = 1$, alors $S = n \cdot V_p$

$$\text{Si } q \neq 1, \text{ alors : } S = V_p \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

Exemples :

1^{er} cas : $q = 1$.

$$S = V_0 + V_1 + \dots + V_n = (n+1) \cdot V_0$$

$$S = V_1 + V_2 + \dots + V_n = n \cdot V_1$$

2^{ème} cas : $q \neq 1$

$$S = V_0 + V_1 + \dots + V_n = V_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$S = V_1 + V_2 + \dots + V_n = V_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

* a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique $\Leftrightarrow b^2 = ac$

$$q \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } q \in]-1, 1[\\ \text{n'existe pas} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

Activités 2 et 3 page 26.

Propriétés

$U = (U_n)_{n \in I}$ une suite réelle définie sur $I = [n_0, +\infty[$

- U est majorée sur I , si et seulement si, il existe un réel fixe M tel que : $\forall n \in I, u_n \leq M$.
Le réel M est un majorant de la suite U .
- U est minorée sur I , si et seulement si, il existe un réel fixe m tel que : $\forall n \in I, u_n \geq m$.
Le réel m est un minorant de la suite U .
- Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée.
- U est dite positive lorsque : $\forall n \in I, u_n \geq 0$.
- U est croissante $\Leftrightarrow \forall (n, p) \in I \times I, (n > p \Rightarrow u_n \geq u_p) \Leftrightarrow \forall n \in I, u_{n+1} \geq u_n$.
- U est strictement croissante $\Leftrightarrow \forall (n, p) \in I \times I, (n > p \Rightarrow u_n > u_p) \Leftrightarrow \forall n \in I, u_{n+1} > u_n$.
- U est décroissante $\Leftrightarrow \forall (n, p) \in I \times I, (n > p \Rightarrow u_n \leq u_p) \Leftrightarrow \forall n \in I, u_{n+1} \leq u_n$.
- U est strictement décroissante $\Leftrightarrow \forall (n, p) \in I \times I, (n > p \Rightarrow u_n < u_p) \Leftrightarrow \forall n \in I, u_{n+1} < u_n$.
- U est constante $\Leftrightarrow \forall (n, p) \in I \times I, u_n = u_p \Leftrightarrow \forall n \in I, u_{n+1} = u_n$
 \Leftrightarrow il existe un réel λ tel que $\forall n \in I, u_n = \lambda$.

Convergence des suites réelles

$U = (U_n)_{n \in I}$ une suite réelle définie sur $I = [n_0, +\infty[$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ peut exister comme peut ne pas l'être, lorsqu'elle existe, elle est soit un nombre réel ℓ , soit $+\infty$, soit $-\infty$.

- Lorsqu'une suite réelle admet une limite alors elle est unique.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow U$ est convergente vers ℓ .

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0.$$

- U est divergente $\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ n'existe pas} \\ \text{ou} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty \end{cases}$.

- Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \text{ pour tout } n > p \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{cases}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ existe et vaut $+\infty$.

- Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \text{ pour tout } n > p \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{cases}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe et vaut $-\infty$.

- Si $\begin{cases} |u_n| \leq v_n \text{ pour tout } n > p \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{cases}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe et vaut 0.

[Exercices : 4, 5, 8, 9 pages 35 et 36.](#)

II. Autres propriétés :

- Soit $U = (U_n)_{n \in I}$ une suite réelle et a fini ou infini.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = a \\ \text{et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = a \end{cases} .$$

Exercices : 2, 3 page 35.

- Toute suite convergente est bornée.
- Toute suite croissante et majorée est convergente vers un réel ℓ et pour tout n , $u_n \leq \ell$.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente vers un réel ℓ et pour tout n , $u_n \geq \ell$.

Remarques :

Si une suite est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
Si une suite est décroissante et non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Exercice :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

Montrer que U est croissante. En déduire qu'elle est convergente.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |\ell|$. (la réciproque est fausse).
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$. (la réciproque est fausse).
- Si $\begin{cases} (u_n) \text{ converge vers } \ell \\ (v_n) \text{ converge vers } \ell' \\ u_n < v_n \text{ à partir d'un certain rang} \end{cases}$ alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \\ \ell \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors U est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Exemple : $u_n = \frac{2}{n} \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right)$.

• Image d'une suite par une fonction :

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite de points de I .

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \end{cases} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell.$$

- Si (u_n) est une suite qui converge vers un réel ℓ et si $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$.

Exercice :

Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \end{cases}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
2. Etudier la monotonie de U .
3. En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

• Suites adjacentes :

Définition :

Deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes lorsque :

$$a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

(a_n) est croissante

(b_n) est décroissante

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Théorème :

Si deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes (avec $a_n \leq b_n$) alors elles sont convergentes et ont même limite ℓ . De plus pour tout n , on a : $a_n \leq \ell \leq b_n$.

Exercice : 21 page 38.

Exercice :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2)$.

1. Soit la fonction définie sur $[1,2]$ par $f(x) = x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$.
 - a) Etudier les variations de f sur $[1,2]$.
 - b) Montrer que pour tout x de $[1,2]$, $|f(x) - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|x - \sqrt{2}|$.
2.
 - a) Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , $1 \leq u_n \leq 2$.
 - b) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
 - c) En déduire que pour tout n de \mathbb{N} , $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Conclure.